

Feuille 5. Un mélange de questions

Exercice 1. Soit $h \in \mathbb{C}(z)$. On l'écrit comme $h(z) = \alpha \prod_{i=1}^k (z - a_i)^{n_i}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, les $a_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On suppose qu'au moins l'un des n_i est impair.

1. Montrer que $w^2 - h(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)[w]$ est irréductible.
2. Montrer que la surface de Riemann associée à $w^2 - h(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)[w]$ est isomorphe (isomorphisme de revêtements) à celle associée à $w^2 - g(z)$ pour certain polynôme $g \in \mathbb{C}[z]$ sans racines multiples.
3. Montrer qu'une surface de Riemann connexe et compacte qui admet un revêtement à deux feuillets sur $\mathbb{CP}^1$ est hyperelliptique **dans le sens de la feuille de TD 3**.
4. Soient ℓ points distincts $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{CP}^1$. Si ℓ est pair, montrer qu'il existe un unique revêtement branché à deux feuillets (modulo isomorphisme) tel que $p_1, \dots, p_\ell$ sont les points de ramification. Si ℓ est impair, montrer qu'il n'existe pas un tel revêtement.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[z, w, t]$ un polynôme homogène irréductible tel que $\deg P \geq 2$ et définissons $X = \{[z, w, t] \in \mathbb{CP}^2 : P(z, w, t) = 0\}$. Montrer que X est une surface de Riemann si et seulement si $\{(z, w, t) \in \mathbb{C}^3 : \partial P / \partial z(z, w, t) = \partial P / \partial w(z, w, t) = \partial P / \partial t(z, w, t) = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Dans ce qui suit S sera une surface de Riemann connexe et compacte.

Exercice 3. Supposons que S est de genre 2 et soient $\pi_1, \pi_2 : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ deux revêtements à deux feuillets. Montrer qu'il existe un biholomorphisme $F : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ tel que $F \circ \pi_1 = \pi_2$. En déduire que les points de branchement (points de S) de π_1 et de π_2 sont les mêmes.

Exercice 4. Soit X une variété complexe et $Y \subset X$ une sous-variété complexe fermée de X . Montrer que, pour toute application holomorphe $f : S \rightarrow X$,

$$f^{-1}(Y) = S \quad \text{ou} \quad f^{-1}(Y) \text{ est fini.}$$

Exercice 5. Soit f méromorphe sur S et $\mathcal{L} : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ définie par $\mathcal{L}(z) = \log |f(z)|$.

1. Montrer que $\mathcal{L} \in L^1(S)$ dans le sens¹ où, pour chaque 2-forme lisse ρ , on a $\mathcal{L} \in L^1(S, \rho)$.
2. Si $\text{div}(f) = \sum_{i=1}^n n_i [p_i]$, montrer que $\Delta \mathcal{L} = 2\pi \sum_{i=1}^n n_i \delta_{p_i}$ dans le sens où

$$\int_S \mathcal{L} \Delta h = 2\pi \sum_{i=1}^n n_i h(p_i) \quad \text{pour toute } h \in C^\infty(S).$$

Définissons la notion de fibré holomorphe de fibre $\mathbb{CP}^1$. Prenons une variété complexe E et une application holomorphe $\pi : E \rightarrow S$. On dira que (E, π) est un fibré holomorphe de fibre $\mathbb{CP}^1$ si pour chaque $p \in S$ il existe un voisinage ouvert U de p et un biholomorphisme $\varphi : U \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tel que $\pi \circ \varphi = \pi_1$ où $\pi_1 : U \times \mathbb{CP}^1$ est la projection à la première coordonnée. Une section sera une application holomorphe $f : S \rightarrow E$ telle que $\pi \circ f = \text{Id}_S$.

Exercice 6. Définir un fibré holomorphe E sur S de fibre $\mathbb{CP}^1$ muni d'une section holomorphe σ de E tel qu'il y ait une identification "naturelle" entre les 1-formes méromorphes sur S et les sections holomorphes de E différentes de σ .

1. Noter qu'il suffit de le vérifier pour une 2-forme qui ne s'annule nulle part.