Feuille 2. Diviseurs

La surface de Riemann X considérée est connexe et compacte.

— $\mathrm{Div}(X)$ = groupe abélien libre engendré par X. Un élément de $\mathrm{Div}(X)$ sera de la forme $\sum_{i=1}^{k} n_i[p_i]$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $p_i \in X$, et les éléments de $\mathrm{Div}(X)$ seront appelés *diviseurs*[1].

— Le morphisme $\mathrm{div} : \mathcal{M}(X)^* \mapsto \mathrm{Div}(X)$ sera donné par

$$\mathrm{div} f = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p f \,[p].$$

— Un diviseur dans l'image de div sera appelé *diviseur principal* et l'ensemble des diviseurs principaux sera dénoté par $\mathrm{Princ}(X)$.

— Deux diviseurs seront *linéairement équivalents* si leur différence est un diviseur principal.

— Définissons $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ par $\deg(\sum_{i=1}^{k} n_i[p_i]) = \sum_{i=1}^{k} n_i$ et son noyau $\mathrm{Div}^0(X)$.

— On dira que $D = \sum_{i=1}^{k} n_i[p_i] \in \mathrm{Div}(X)$ est *effectif* et on écrira $D \geq 0$ si $n_i \geq 0$ pour tout i.

— Pour deux diviseurs $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$, on écrira $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2$ est effectif.

— Pour $D \in \mathrm{Div}(X)$, on regardera l'espace

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : f = 0 \text{ ou } \mathrm{div} f + D \geq 0\}.$$

— On utilisera la notation $\ell(D) = \dim(L(D))$.

Exercice 1. Montrer que si D_1 et D_2 sont linéairement équivalents alors $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Exercice 2. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X)^*$. Montrer que si $\mathrm{div} f_1 = \mathrm{div} f_2$ alors $f_1 = \alpha f_2$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{M}(X)^*$. Montrer que $L(\mathrm{div} f)$ est engendré par $1/f$.

Exercice 4. Montrer que $\mathrm{Div}(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathrm{Div}^0(X)$.

Exercice 5. Montrer que si D_1 est linéairement équivalent à D_2 alors $\ell(D_1) = \ell(D_2)$.

Exercice 6. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ tel que $D \geq 0$. Montrer que $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$.

Exercice 7. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. Montrer que si $\deg(D) < 0$ alors $L(D) = 0$.

Exercice 8. Montrer que $\ell(D) > 0$ si et seulement s'il existe $\tilde{D} \sim D$ tel que $\tilde{D} \geq 0$.

Exercice 9. Supposons que $E \in \mathrm{Div}(X)$ satisfait $\ell(D - E) > 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{D} \in \mathrm{Div}(X)$ tel que $\tilde{D} \sim D$ et $\tilde{D} \geq E$.

Exercice 10. Soit $D \in \mathrm{Div}^0(X)$. Montrer que $D \in \mathrm{Princ}(X)$ si et seulement si $\ell(D) \geq 1$.

Exercice 11. Soit $D \in \mathrm{Div}^0(X)$. Montrer que $\ell(D) = \ell(-D)$.

1. Le groupe $\mathrm{Div}(X)$ a une structure naturelle de groupe topologique en identifiant $\sum_{i=1}^{k} n_i[p_i]$ à la mesure $\sum_{i=1}^{k} n_i \delta_{p_i}$ et en considérant la topologie faible dans l'espace des mesures finies.

Exercice 12 (Cas de la sphère)**.** Prenons $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1. Est-ce que la fonction $f : X \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z$ est meromorphe sur X ? Si oui, quel est son diviseur ?
2. Montrer que toute fonction holomorphe sur X est constante en regardant une telle fonction dans les deux cartes (sans utiliser le théorème de Liouville).
3. Montrer que $\mathrm{Princ}(X) = \mathrm{Div}^0(X)$.
4. Décrire explicitement $L(k[\infty])$ pour $k \geq 0$. Qu'est-ce qu'on obtient pour $k < 0$?
5. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. Calculer $\ell(D)$.
6. Donner une description (plus ou moins) explicite de $L(D)$ pour $D \in \mathrm{Div}(X)$.

Exercice 13 (Cas des tores)**.** Prenons $X = \mathbb{C}/\Gamma$ une courbe elliptique.

1. Montrer que $\mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{Princ}(X)$ est isomorphe [2] à $\mathbb{C}/\Gamma$. En déduire que $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Princ}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}/\Gamma)$.
2. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ tel que $\deg(D) \geq 1$. Montrer qu'il existe $p \in X$ tel que D soit linéairement équivalente à $\deg(D)[p]$.
3. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ tel que $\deg(D) \geq 1$. Montrer que $\ell(D) = \deg(D)$.

Exercice 14. Soit $k \geq 1$ et $P = (z - a_1) \dots (z - a_k)$ un polynôme monique de racines simples. Considérons la surface de Riemann

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = P(z)\}.$$

Prenons les fonctions w et z, obtenues en restreignant les coordonnées w et z de $\mathbb{C}^2$ à X.

1. Les fonctions w et z sont-elles holomorphes sur X ? Justifiez en utilisant la définition.
2. Calculer $\operatorname{div} w$.
3. Calculer $\operatorname{div} z$.

Supposons qu'on arrive à trouver une surface de Riemann **compacte** S contenant X telle que $S \setminus X$ a un nombre fini de points (en particulier, X est un ouvert de S).

4. Pouvons nous étendre w et z à S ? De façon holomorphe ? De façon méromorphe ?
5. Montrer que $S \setminus X$ a au plus 2 points.

2. On pourrait aussi montrer qu'ils sont isomorphes en tant que groupes topologiques.