ESCUELA DE POSGRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESIS DE MAESTRÍA:

DESARROLLO MATEMÁTICO DEL ELECTROMAGNETISMO

Presentada por:
David García Zelada

Supervisada por:
Rudy Rosas Bazán

Índice general

1. El campo eléctrico y el magnético **6**
- 1.1. Campo eléctrico: electrostática 6
- 1.2. Dipolo eléctrico 8
- 1.3. Campo magnético: magnetostática 10
- 1.4. Dipolo magnético 14
- 1.5. Influencia de un campo magnético 16
- 1.6. Ecuaciones de Maxwell 18

2. Lagrangiano y Hamiltoniano **22**
- 2.1. Aproximación lagrangiana 23
- 2.2. Aproximación hamiltoniana 25
- 2.3. Formulación hamiltoniana vs. lagrangiana 25

3. Relatividad especial **29**
- 3.1. Espacio-tiempo de Minkowski 30
- 3.2. Clasificación de vectores 32
- 3.3. Partícula (clásica relativista) 35

4. El campo electromagnético **39**

5. Coderivada y el lagrangiano electromagnético **45**

6. Mecánica Cuántica **49**

7. Grupos de Lie **55**

8. Fibrados principales **61**
- 8.1. Fibrados 61
- 8.2. Conexiones y fibrado principal 63
- 8.3. Curvatura y campo electromagnético 74

9. Electromagnetismo y mecánica cuántica **80**
9.1. Ecuación de Schrödinger 80
9.2. Ecuación de Klein-Gordon 84

A. Cohomología de De Rham en abiertos de $\mathbb{R}^3$ **87**

B. Cohomología de De Rham **91**

C. Campos vs formas **97**

D. Cono de luz **100**

E. Teorema de Zeeman **103**

F. Rectas en rectas **109**

Bibliografía **115**

Introducción

Ya desde la antigüedad se conocían ciertas piedras mágicas (magnetita) que podían atraer pequeñas cantidades de hierro, y la capacidad del ámbar de atraer objetos livianos. Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XIX que se comprendió la relación existente entre la electricidad y el magnetismo y, más tarde, la óptica. Maxwell escribió sus ecuaciones utilizando cuaterniones (usaba la parte real e imaginaria de ellos por separado). Heaviside, luego, se encargó de traducir dichas ecuaciones al nuevo lenguaje: vectores. Más adelante, ya entendida la estructura de espaciotiempo de Minkowski de nuestro universo, y, utilizando el lenguaje de formas diferenciales, se logró reducir el número de ecuaciones a dos. Al mismo tiempo, Hermann Weyl intentó unificar la gravedad con el electromagnetismo y propuso que la estructura del espaciotiempo no era una estructura pseudoriemanniana sino una estructura conforme. Esta teoría no fue aceptada pero sus ideas aparecieron más tarde al notar que el campo electromagnético tomaría la forma de una conexión en mecánica cuántica.

En el presente trabajo expondremos el desarrollo matemático del electromagnetismo, concentrándonos principalmente en las ideas y dejando de lado algunas demostraciones cuando no son compatibles con este fin.

Empezaremos en el capítulo 1 explicando las leyes de Maxwell en notación vectorial. Intentaremos hacer plausibles dichas ecuaciones en base a la intuición y al experimento. Primero consideraremos el campo eléctrico cuya definición es fácil de entender. Luego introduciremos el campo magnético haciendo una analogía con el eléctrico y considerando un imán como un par de partículas de cargas opuestas. Verificaremos que, al proponer las leyes del campo magnético, obtenemos un parecido entre el campo eléctrico y magnético a nivel de dipolos. Más adelante, al pensar en cómo influyen estos campos en las partículas nos veremos obligados a hacer que el campo eléctrico se vea influenciado por el magnético y viceversa. Esto ocasionará que dichos campos se comporten como ondas en ausencia de fuentes.

En el capítulo 2 introduciremos las ideas de la mecánica lagrangiana y hamiltoniana. Esto será necesario después para hablar de mecánica cuántica y para describir la evolución de campos electromagnéticos desde un punto de vista más fácilmente generalizable. Daremos como ejemplo el lagrangiano que nos ayuda a describir una partícula en un campo electromagnético, el cual será necesario en el capítulo de mecánica cuántica.

Luego, en el capítulo 3, comentaremos un poco sobre la teoría de la relatividad especial. Introduciremos la idea de espacio-tiempo de Minkowski y este será el contexto donde podremos colocar las ecuaciones de Maxwell

de una manera más unificada. Definiremos una partícula clásica relativista y su cantidad de movimiento. Necesitaremos tener dicha idea al intentar hacer plausible la extensión que propone De Broglie sobre la dualidad onda partícula. De paso, comentaremos sobre el tiempo medido por una partícula (la llamada hipótesis del reloj) y la modificación del lagrangiano de una partícula libre.

Ya preparados para definir la primera noción de campo electromagnético, en el capítulo 4 definiremos y utilizaremos el dual de Hodge en un espacio-tiempo de Minkowski. Mencionaremos la ecuación de onda y la ecuación de continuidad en dicho contexto. Por último, modificaremos el lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético.

Para volver las ecuaciones de Maxwell más fácilmente generalizables, en el capítulo 5 notaremos que provienen de un principio variacional parecido a lo visto en el segundo capítulo sobre la mecánica de Lagrange. En el camino definiremos el operador codiferencial δ.

En el capítulo 6 hablaremos sobre las primeras ideas en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Estas ideas serán necesarias para motivar la visión del potencial electromagnético como una conexión en un fibrado en lugar de simplemente una 1-forma.

Para poder describir mejor ello, en el capítulo 7 daremos una definición de grupo de Lie y comentaremos las ideas necesarias para nosotros, principalmente introduciremos el álgebra de Lie de un grupo de Lie y la aplicación exponencial.

En el capítulo 8 se empezará a establecer la idea de fibrado vectorial. La idea de conexión se intentará hacer plausible y la definición de fibrado principal, natural. Luego, se definirá la curvatura de una conexión y notaremos que esta es la que representa al campo electromagnético.

Por último, en el capítulo 9, volveremos a hablar de la ecuación de Schrödinger del capítulo de mecánica cuántica y la enunciaremos en el nuevo lenguaje. Rápidamente, introduciremos la llamada ecuación de Klein-Gordon en este nuevo contexto y notaremos que ambas nos dan una fuente natural para el campo electromagnético. Así, el campo electromagnético es una conexión en un fibrado principal, una partícula es un sección de un fibrado vectorial asociado y ambos interactúan de manera natural.

Capítulo 1

El campo eléctrico y el magnético

Como fue mencionando en la introducción, comenzaremos revisando las ecuaciones de Maxwell. Empezaremos con la idea principal: la de campo.

1.1. Campo eléctrico: electrostática

Al estudiar la fuerza eléctrica y magnética, Faraday tuvo una idea muy interesante: ¿Qué tal si consideramos que las partículas producen algún ente (que llamaremos campo) y es este ente el que actúa en las otras partículas? De esta manera podríamos separar el estudio de la electricidad en dos partes, por un lado las partículas producen campos y, por el otro, los campos influyen en el movimiento de las partículas.

Según la ley que el físico francés Charles-Augustin de Coulomb publicó en 1785, muy parecida a la que Newton postuló sobre la gravedad para explicar las órbitas elípticas que siguen los planetas, la fuerza que ejerce una partícula de carga Q ubicada en el origen sobre una de carga q ubicada en $\vec{r}$ es

$$k\frac{qQ\ \hat{r}}{r^2}$$

donde $\hat{r}$ representa el vector unitario en la dirección de $\vec{r}$, r representa la distancia del origen a $\vec{r}$, y k es una constante de proporcionalidad.

Si son varias partículas de cargas Q_i las que actúan sobre una partícula de carga q entonces, según Newton, las fuerzas se suman

$$\sum_i k\frac{qQ_i\ \hat{r}_i}{r_i^2}$$

donde el índice i denota a la i-ésima partícula, $\hat{r}_i$ denota el vector unitario que parte de la i-ésima partícula y apunta a la partícula de carga q, y r_i denota a la distancia entre estas dos partículas.

Notamos que la fuerza se puede escribir con un término independiente de q, que llamamos $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \sum_i k\frac{Q_i\ \hat{r}_i}{r_i^2}$$

Con este la fuerza anterior sería

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Siguiendo la filosofía de Faraday, se pensará que una distribución de cargas (varias partículas cargadas) genera un campo eléctrico $\vec{E}$ y este campo actúa en una partícula de carga q ejerciéndole una fuerza igual a $q\vec{E}$.

Ya sabemos cuál es el campo que generan varias partículas. Si queremos extender este resultado para otros tipos de distribuciones de cargas (e.g. una distribución continua), una manera natural sería sustituir el símbolo $\sum$ por otro análogo (como una integral $\int$, por ejemplo). En lugar de hacer eso, tomaremos otra aproximación.

De la misma manera que describimos mediante una ecuación el movimiento de las partículas, queremos ecuaciones que determinen el campo eléctrico a partir de las fuentes.

El campo eléctrico generado por l partículas ubicadas en $\vec{r}_i,\ i = 1, 2, ..., l$ con cargas $q_1, q_2, ..., q_l$ sería un campo vectorial en $U = \mathbb{R}^3 - \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_l\}$ que, por ser suma de campos radiales, es un campo conservativo. Es decir, en el primer nivel, es una forma exacta (ver apéndice A). Observemos el segundo nivel. Notamos que el divergente es cero, sin embargo, no es el rotacional de una función. Es más, elegir una sucesión de cargas $q_1, q_2, ..., q_l$ es exactamente lo mismo que elegir un elemento de $H_2(U)$. Entonces, las ecuaciones buscadas serían

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \qquad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

donde Γ es una curva cerrada, S es una superficie cerrada (i.e. compacta) en U, Q_{int} es la suma de las cargas que se encuentran en el interior de S y $1/\epsilon_0$ es la constante de proporcionalidad igual a $4\pi k$.

Si tenemos una distribución continua de cargas dada por la densidad ρ, es decir, $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua tal que en una región V del espacio la carga Q_V encerrada en V es

$$Q_V = \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$

las condiciones anteriores se traducirían en

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

A la segunda de estas ecuaciones se la conoce como ley de Gauss. Para que dichas ecuaciones determinen el campo eléctrico podemos imponer, por ejemplo, que el campo eléctrico tiende a cero en el infinito. En este caso, la densidad de carga lo determina completamente puesto que la diferencia $\vec{E}$ de dos campos eléctricos con la misma fuente satisfaría

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

y, por lo tanto, (ver apéndice C)

$$0 = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E} \right) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

entonces

$$\nabla^2 \vec{E} = 0$$

1.2. Dipolo eléctrico

Ahora ataquemos un problema que parece de una naturaleza completamente diferente, el campo magnético. Para estudiarlo imaginamos dos imanes: estos se atraen o se repelen dependiendo de su orientación. Nos damos cuenta de que, si partimos un imán en dos, siguen existiendo dos imanes (con la misma orientación). Al realizar ese proceso indefinidas veces podemos imaginar que un imán consta de «imanes infinitesimales» los cuales podríamos modelar como partículas positivas y negativas una a lado de la otra que generan lo que ahora llamaríamos un campo magnético.

Calculemos el campo eléctrico generado por el siguiente sistema: Dos partículas con cargas opuestas de tamaño q separadas una distancia d (extremadamente pequeña). Si disminuimos la distancia d sin manipular la carga q, en el límite obtendremos, naturalmente, un campo eléctrico 0 (pues

la carga neta al final sería cero). Esto quiere decir que, al disminuir la distancia d debemos aumentar la carga q. Asumimos, entonces, que la cantidad qd se mantiene constante y construimos lo que llamaremos momento dipolar eléctrico $\vec{p}$, dicho vector apunta desde la partícula de carga negativa a la de carga positiva y tiene magnitud qd. El campo eléctrico producido se debe a ambas partículas. Llamaremos $\vec{E}_+$ al producido por la de carga positiva y $\vec{E}_-$ al producido por la de carga negativa. El campo eléctrico total sería

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Si el centro entre las dos partículas es el origen y el vector que parte de la partícula con carga negativa y termina en la que tiene carga positiva es $\vec{d}$, tenemos que

$$\vec{a}_+ = \frac{\vec{d}}{2}, \qquad \vec{a}_- = -\frac{\vec{d}}{2}$$

donde $\vec{a}_+$ representa la posición de la partícula de carga positiva y $\vec{a}_-$ la de la carga negativa. Si definimos la función

$$\vec{G} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{G}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

podemos notar que

$$\vec{E} = kq[\vec{G}(\vec{r} - a_+) - \vec{G}(\vec{r} - a_-)]$$

$$= kq\left[\vec{G}\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right) - \vec{G}\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right)\right]$$

Si tomamos el límite cuando $\vec{d}$ tiende a cero pero manteniendo $q\vec{d}$ constante obtenemos

$$\lim \vec{E} = k \lim_{t\to 0} \frac{q}{t}\left[\vec{G}\left(\vec{r} - \frac{t\vec{d}}{2}\right) - \vec{G}\left(\vec{r} + \frac{t\vec{d}}{2}\right)\right]$$

$$\lim \vec{E} = -k\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{p}}$$

Esto lo hemos desarrollado puesto que algo similar deberíamos obtener en el caso del magnetismo: un «momento dipolar magnético» debería generar un campo magnético análogo.

Hemos obtenido el campo eléctrico que produce un dipolo eléctrico. Otra pregunta sería: ¿cómo afecta un campo eléctrico $\vec{E}$ en un dipolo eléctrico?

Procedamos como antes. Si el dipolo se encuentra en $\vec{r}$, entonces, la partícula de carga positiva se encuentra en $\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}$ y la de carga negativa en $\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}$. La fuerza total (suma de fuerzas) en el dipolo sería

$$\text{fuerza en dipolo} = q\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)$$

de nuevo, tenemos que hacer $\vec{d}$ tender a cero pero mantener $q\vec{d}$ constante con lo que

$$\text{fuerza en dipolo} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{p}}$$

Así, tenemos el modelo para la forma del campo magnético producido por un imán infinitesimal ubicado en el origen y, además, la posible fuerza que actúa en uno de ellos. Sin embargo, aún no sabemos qué produce a dicho campo magnético... cargas magnéticas sería una opción natural pero por alguna extraña razón solo las estaríamos encontrando en pares.

1.3. Campo magnético: magnetostática

El físico danés Hans Christian Ørsted, en 1820, notó que una corriente (carga en movimiento) afectaba la dirección en la que apuntaban las agujas de las brújulas: Haciendo pasar corriente por un alambre recto largo podemos concluir que produce un campo magnético que circula alrededor del alambre (en sentido horario si vemos en la dirección a la que se 'dirige' la corriente) (ver figura 1.1). En la imagen anterior la flecha larga representa un alambre y las líneas punteadas el campo magnético.

Esto nos indica una nueva opción de qué produciría el campo magnético. Un imán infinitesimal podría ser un alambre infinitesimal. El modelo más sencillo sería un alambre circular infinitesimal (en un alambre recto se acumularía la carga) y una corriente que lo recorre. Los dos polos de este imán se corresponderían con las dos caras del círculo puesto que un imán infinitesimal tendría simetría cilíndrica considerando un eje que va de un polo al otro (ver figura 1.2).

Ahora, consideremos uno de esos alambres rectos infinitos y preguntémonos por cómo será exactamente su campo magnético y de qué dependerá. En los casos referentes al campo eléctrico teníamos que lo habíamos caracterizado por dos integrales: una integral de línea y una de superficie. En ambos casos nos dábamos cuenta de que la integral era invariante por homotopía, es decir, el campo era cerrado fuera de la carga puntual. Esperamos que

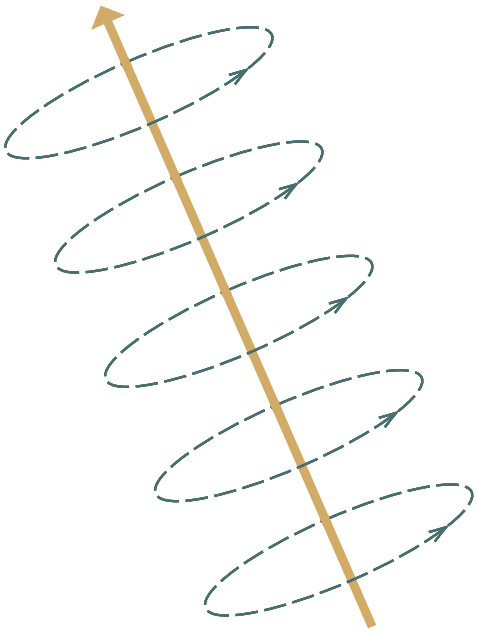

Figura 1.1: La flecha larga representa un alambre y las líneas punteadas el campo magnético

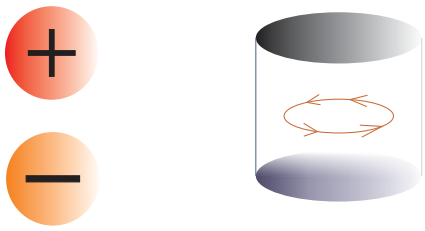

Figura 1.2: A la izquierda: Dipolo eléctrico. A la derecha: Dipolo magnético

esto también ocurra en el campo magnético. Para un alambre determinado, obtendríamos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = constante$$

¿De qué depende dicha constante? Lo que podemos imaginar que ocurre en el alambre es que tenemos partículas de carga q arregladas en una línea (el alambre) donde la distancia de partículas consecutivas es d y la velocidad de cada una de ellas es v (ver figura 1.3). Serían los únicos datos que determinan la configuración. Esa constante debe ser una combinación de ellos.

Duplicar la carga es como colocar dos alambres infinitos uno al costado del otro. Esperaríamos, entonces, guiándonos del principio de superposición que usamos para el campo eléctrico, que se sumen los campos. Esto es, el campo se duplica también. Lo mismo si multiplicamos la carga por cualquier entero positivo. Esto nos dice, usando continuidad, que sería plausible que la constante sea lineal en la carga (si es positiva). Lo mismo ocurriría si usamos solo cargas negativas. Y, si consideramos el opuesto de la carga, obtenemos el opuesto del campo (pues la fuente neta, al juntar carga positiva con su opuesta a la misma velocidad, sería carga cero en movimiento). Entonces, asumimos que es lineal en la carga.

Si tomamos la mitad de la distancia podemos pensar que, otra vez, es lo mismo que tener dos alambres, uno ligeramente desplazado del otro. Entonces, usando un argumento análogo tenemos linealidad en $1/d$.

Por último, ¿qué sucede con la velocidad? Sería más dificil comparar una velocidad con el doble de ella. Lo único que sabemos es que si la velocidad es 0 el campo magnético es 0. Lo más sencillo sería considerar linealidad en

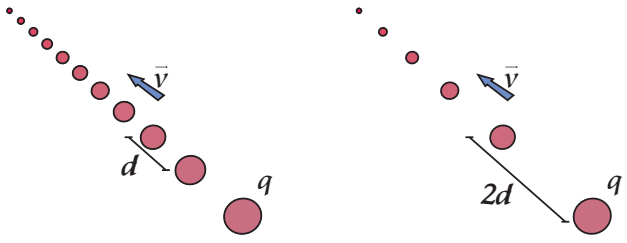

Figura 1.3: A la izquierda: Alambre infinito. A la derecha: Alambre infinito con d duplicado

v. Con ello tendríamos que la constante es proporcional a

$$\frac{qv}{d}$$

Notamos que existe una interpretación interesante para dicha cantidad. Si fijamos un punto en el alambre, qv/d sería la carga que pasa por dicho punto por unidad de tiempo. A esa cantidad la llamamos corriente y la denotamos por I. Notemos que sería lo mismo considerar carga positiva en una dirección que carga negativa en la otra.

Entonces, postularemos que, a lo largo de toda curva Γ que encierra la corriente una vez

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I$$

donde μ_0 sería una constante de proporcionalidad (positiva según el experimento con la brújula), I sería la corriente que encierra Γ cuya dirección estaría dada por la orientación de Γ utilizando la regla de la mano derecha. De esta ley obtenemos que el campo magnético debido a un alambre debería tener magnitud

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

con r la distancia del punto al alambre.

También deberíamos pensar en las propiedades del campo magnético al segundo nivel. Vimos anteriormente que un iman se debería comportar como un montón de pares de cargas una opuesta a la otra. Con esta idea es natural postular que

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Ahora, para hablar de distribuciones continuas de carga definimos la densidad de corriente $\vec{J}$ como la corriente por unidad de área pues, en general, la distribución de carga no atraviesa un punto sino una superficie. De esta manera, la corriente I que atraviesa una superficie S sería

$$I = \oint_{S} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

con lo que las leyes enunciadas para el campo magnético tomarían la forma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Aceptar la primera de las dos ecuaciones tiene como consecuencia que la corriente a través de cualquier superficie cerrada es cero, esto es, la carga debe permanecer constante en todas partes. Esto indica que nuestras ecuaciones necesitan ser generalizadas para tomar en cuenta los casos en los que las cantidades varían en el tiempo.

1.4. Dipolo magnético

Ahora, recordemos que teníamos un modelo para el campo magnético producido por un dipolo magnético. Veamos qué predice nuestras ecuaciones. En el caso del dipolo eléctrico ya teníamos una fórmula para el campo generado por una partícula. En este caso lo que tenemos solo es el campo producido por un alambre infinito. No sería sencillo construir uno finito partiendo de uno infinito. Empecemos, entonces, con las ecuaciones y asumiendo una distribución continua $\vec{J}$ de densidad de corriente. La ecuación

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

nos dice que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

para algún campo vectorial $\vec{A}$. Falta usar la otra ecuación.

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{J}$$

Recordemos que

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A}$$

Sería más sencillo si podríamos hacer que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. En ese caso tendríamos un modelo para la solución (cada componente satisfaría la ley de Gauss con fuentes, esencialmente, las componentes de la densidad de corriente). Veamos si la solución del caso del potencial eléctrico funciona

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \mathrm{d}V'$$

Cumple que $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ pero falta ver si $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \mathrm{d}V'$$

Notamos que

$$\nabla \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} = -\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

si, además, usamos que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ obtenemos

$$\nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

y si la corriente decrece lo suficientemente rápido (en nuestro caso no hay ningún problema pues la corriente es de soporte compacto)

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Consideremos ahora una densidad de corriente con simetría cilíndrica. Queremos que sea el modelo de un alambre circular por lo que asumimos que es diferente de cero solo cerca de dicho alambre. Si llamamos I a la corriente que pasa por una cara y hacemos que el tamaño de la cara decrezca obtenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

Como lo que queremos es que el tamaño de la circunferencia tienda a cero y vemos una integral a lo largo de una curva, se nos ocurre que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathcal{A} \frac{1}{\mathcal{A}} \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área del círculo encerrado por la circunferencia. Si mantenemos $I\mathcal{A}$ constante y hacemos tender el área a cero tenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathcal{A}\hat{u} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$

donde $\hat{u}$ es el vector unitario normal al círculo con borde la circunferencia. Al vector $I\mathcal{A}\hat{u}$ lo denotamos por $\vec{M}$ y es llamado momento magnético.

Solo falta hallar el campo magnético y compararlo con el campo eléctrico producido por un dipolo.

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{M} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{M} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Entonces, recordando que habíamos definido

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

tenemos que

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{M}}$$

que tiene exactamente la misma forma que el campo eléctrico generado por un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ que era

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{p}}$$

Hasta ahora tenemos leyes que generan campo eléctrico y campo magnético. Sabemos cómo actua el campo eléctrico en alguna partícula cargada. Lo que no sabemos es cómo actúa el campo magnético.

1.5. Influencia de un campo magnético

Consideremos una partícula de carga q moviéndose a una velocidad $\vec{v}$. La segunda ley de Newton parece imponer la restricción de que la fuerza puede depender a lo más de la velocidad de la partícula. Si nos guiamos de la idea del dipolo magnético la fuerza debería crecer si la carga o la velocidad o el campo magnético crecen. Postulemos, entonces, que la fuerza es lineal en aquellas variables. Necesitamos una aplicación bilineal de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ que describa la fuerza (la parte de la carga solo sería multiplicar por q. La forma la podemos obtener del experimento con los cables descrito anteriormente. Ocurre que si ponemos dos cables paralelos ambos se atraen o se repelen si la corriente se dirige en la misma dirección o en la contraria respectivamente. Entonces, la fuerza resulta perpendicular a la velocidad y al campo magnético. Esto quiere decir que

$$\vec{F} \propto q\vec{v} \times \vec{B}$$

Como aún tenemos libertad para elegir las unidades del campo magnético, exigimos que la constante de proporcionalidad sea 1, y en este caso

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Revisemos cuál sería la fuerza producida en un dipolo magnético. Una forma sería imaginar el dipolo un «continuo» de cargas infinitesimales y hallar la fuerza correspondiente. Otra manera, y la que escogimos aquí, es imaginar una sola partícula cargada que describe una trayectoria circular. Digamos que $\alpha_A : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ representa a la partícula cuando da un giro completo si el área que encierra la circunferencia es A. La fuerza que ejerce

el campo magnético en la partícula en el tiempo t es $q\dot{\alpha}(t) \times \vec{B}(\alpha(t))$. En promedio, la fuerza que experimenta la partícula en un periodo es

$$\frac{1}{T}\int_0^T q\dot{\alpha}(t) \times \vec{B}(\alpha(t))dt$$

La componente i-ésima de dicho vector es

$$\left\langle e_i, \frac{1}{T}\int_0^T q\dot{\alpha}(t) \times \vec{B}(\alpha(t))dt \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T q\left\langle e_i, \dot{\alpha}(t) \times \vec{B}(\alpha(t)) \right\rangle dt$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{T}\int_0^T q\left\langle \dot{\alpha}(t), \vec{B}(\alpha(t)) \times e_i \right\rangle dt$$

es decir, la integral de línea de $\vec{B}\times e_i$ a lo largo de α. Como necesitamos hacer decrecer el tamaño de la circunferencia manteniendo el momento dipolar magnético constante multipliquemos y dividamos entre el área A .

$$\frac{Aq}{T}\left[\frac{1}{A}\int_0^T \left\langle \dot{\alpha}(t), \vec{B}(\alpha(t)) \times e_i \right\rangle dt\right]$$

y luego tomemos el límite cuando A tiende a cero. La cantidad Aq/T sería el tamaño del momento dipolar magnético y el límite de la cantidad entre corchetes es conocido

$$\lim_{A\to 0}\left[\frac{1}{A}\int_0^T \left\langle \dot{\alpha}(t), \vec{B}(\alpha(t)) \times e_i \right\rangle dt\right] = \nabla \times \left(\vec{B} \times e_i\right) \cdot \hat{n} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial e_i} \cdot \hat{n}$$

donde hemos utilizado que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. En resumen,

$$\text{fuerza en dipolo magnético} = \nabla(\vec{B} \cdot \vec{M})$$

Como una de las ecuaciones que teníamos es $\nabla \times \vec{E} = 0$, entonces, la derivada de $\vec{E}$ es simétrica y, por lo tanto, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial e_i} \cdot \hat{n} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \hat{n}} \cdot e_i$. Con esto, la fuerza entre dos dipolos magnéticos toma la misma forma que la fuerza entre dos dipolos eléctricos.

1.6. Ecuaciones de Maxwell

Regresemos a las ecuaciones de Maxwell. Notamos que las últimas leyes escritas nos sugieren que existe un sistema de referencia principal en el cual medir las velocidades. Por ejemplo, si tenemos un alambre circular que se acerca a un imán en reposo, por la fuerza magnética deberíamos obtener una corriente. Si, por el otro lado, pensamos que el alambre circular está en reposo y el imán es el que se mueve, no obtendríamos ninguna corriente. Esto sugiere que, para intentar mantener la simetría, un imán en movimiento debería generar un campo (que debería ser eléctrico pues el alambre está en reposo). Esto se conoce como ley de Faraday y fue observada por él en 1831:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\Gamma = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{S}}$$

El signo viene de la dirección del campo eléctrico generado. Otra manera de escribir lo anterior sería

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Finalmente, falta generalizar las leyes para que la carga no permanezca constante. Notamos que la relación entre la carga contenida en el interior de una superficie y la corriente que sale de esta es la siguiente

$$\frac{dQ}{dt} + I = 0$$

Usando la primera ley mencionada, esto implicaría que

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{S}} + \mathrm{I} = 0$$

Esto nos indica que la ley de Ampere debería quedar modificada como

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{r}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \oint_{\mathrm{S}} \tilde{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{S}} + \mu_0 \mathrm{I}$$

En forma diferencial

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Con todo esto obtenemos las llamadas ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

y estos campos actúan en una partícula de carga q y velocidad $\vec{v}$ ejerciéndole una fuerza

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Una de las consecuencias (la que nos ayudó a generalizar la ley de Ampere) es la relación entre la densidad de carga y densidad de corriente. La obtenemos de tomar el divergente en la última ecuación y reemplazar la primera

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Esta es conocida como ecuación de continuidad.

Otra consecuencia de estas ecuaciones la podemos obtener al tomar el rotacional en la última ecuación (y usar la tercera). En ausencia de corriente obtenemos

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de onda con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Si, además, consideramos que la densidad de carga es cero entonces, al tomar el rotacional en la tercera ecuación (y hacer los respectivos reemplazamientos) obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Esto quiere decir que, en ausencia de fuentes, el campo eléctrico y el campo magnético se comportan como ondas. Experimentalmente, podemos

llegar a que su velocidad es igual a la velocidad de la luz. De esto se interpreta a la luz como ondas de campos eléctricos y magnéticos.

Por ejemplo, consideremos un campo eléctrico y magnético sinusoidal

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot r)$$
$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot r)$$

donde $\vec{k}$ indica la dirección de movimiento de la onda y su módulo tiene información de la longitud de onda λ ($\|\vec{k}\| = 2\pi/\lambda$) mientras que ω tiene información de la frecuencia temporal ($\omega = 2\pi\nu$). De la ecuación de onda obtenemos la relacion $c^2\|\vec{k}\|^2 = \omega^2$.

En este caso las ecuaciones de Maxwell se traducen en las siguientes relaciones

$$\vec{k}\cdot E_0 = 0$$
$$\vec{k}\cdot B_0 = 0$$
$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$$
$$\vec{B}_0\times\vec{k} = \mu_0\epsilon_0\omega\vec{E}_0$$

Finalizando este capítulo, presentamos una imagen de este tipo de solución (ver figura 1.4).

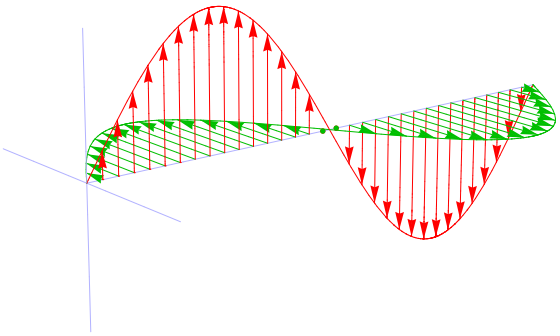

Figura 1.4: Las flechas rojas representan el campo eléctrico y las verdes el magnético. La onda se mueve hacia la izquierda.

Capítulo 2

Lagrangiano y Hamiltoniano

En el capítulo anterior revisamos ecuaciones que describen la evolución de un sistema: Las ecuaciones de Maxwell describen la evolución de los campos eléctrico y magnético y, además, la segunda ley de Newton con la fuerza igual a $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ describe la evolución de una partícula. A continuación revisaremos las principales formas de estudiar la evolución de un sistema.

Recordemos que, si consideramos un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ como un campo de fuerzas, podemos enunciar la segunda ley de Newton para una partícula de masa m como la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Asumamos que existe $U : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla_{\vec{r}}\, U(\vec{r}, t)$$

donde el símbolo $\nabla_{\vec{r}}$ denota que el gradiente se toma solo con respecto a la posición.

Notemos que, si consideramos α, una solución a la ecuación diferencial

anterior (segunda ley de Newton), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(\alpha(t),t)-\frac{\partial}{\partial t}U &= \vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}}\,U(\vec{r},t)\\ &= -\vec{v}\cdot\vec{F}(\vec{r},t)\\ &= -\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}m\vec{v}\\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\\ \frac{d}{dt}\left(U+\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\,U\end{aligned}$$

donde $\vec{r}=\alpha(t)$ y $\vec{v}=\frac{d\alpha}{dt}(t)$

2.1. Aproximación lagrangiana

Ahora intentemos otra aproximación al problema de determinar el movimiento de una partícula. Sea $L:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una aplicación C^1. Vamos a considerar la primera coordenada como posición y la segunda como velocidad. Según la segunda ley de Newton conocer estas dos cantidades en un determinado tiempo debería ser suficiente para conocer todo el movimiento. Fijaremos dos puntos $\vec{r}_1,\vec{r}_2\in\mathbb{R}^3$ y dos tiempos $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ y nos preguntamos ¿cuál será la trayectoria $\alpha:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^3$ de la partícula que parta de $\vec{r}_1$ en el tiempo t_1 y llegue a $\vec{r}_2$ en el tiempo t_2? Postulamos que será tal que minimice la cantidad

$$a(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L(\alpha(t),\dot{\alpha}(t),t)dt$$

donde el punto encima de α indica derivada con respecto a t.

En esta formulación de la mecánica clásica lo que se buscaría es una aplicación L, llamada lagrangiano, que describa el sistema, en lugar de un campo de fuerzas como antes. Para asegurarnos de que esta aproximación tiene sentido veamos qué sería L en el caso de una fuerza como la mencionada antes.

Sea $\alpha\in C^1\left([t_1,t_2],\mathbb{R}^3\right)$ una curva en la cual a es mínimo. Perturbemos α en la dirección de una curva $\delta\in C^1\left([t_1,t_2],\mathbb{R}^3\right)$ tal que $\delta(t_1)=\delta(t_2)=0$, y veamos qué ocurre

$$A(s)=a(\alpha+s\delta)=a(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L(\alpha(t)+s\delta(t),\dot{\alpha}(t)+s\dot{\delta}(t),t)dt$$

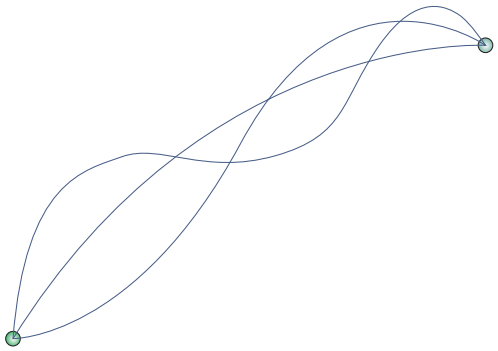

Figura 2.1: Se busca el camino que minimiza la cantidad a.

como A es mínimo en $s = 0$, se debe cumplir que

$$\frac{d}{ds}A(0) = 0$$

entonces, calculemos dicha cantidad

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{ds}A(0) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L(\alpha(t) + s\delta(t), \dot{\alpha}(t) + s\dot{\delta}(t), t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\nabla_{\vec{r}} L\right)(t) \cdot \delta(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\nabla_{\vec{v}} L\right)(t) \cdot \dot{\delta}(t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\nabla_{\vec{r}} L\right)(t) \cdot \delta(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}} L\right)(t) \cdot \delta(t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\nabla_{\vec{r}} L\right)(t) - \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}} L\right)(t)\right] \cdot \delta(t)dt
\end{aligned}$$

donde se ha usado integración por partes junto con el hecho de que $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$.

Como esto se debe cumplir independientemente de δ, tenemos que

$$\left(\nabla_{\vec{r}} L\right)(t) = \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}} L\right)(t)$$

Y al comparar esto con la segunda ley de Newton obtenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{r}} L &= -\nabla_{\vec{r}} U \\
\nabla_{\vec{v}} L &= m\vec{v}
\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos la segunda ley si hacemos

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U$$

El resultado es la energia cinética menos la potencial.

2.2. Aproximación hamiltoniana

Busquemos otra formulación en la que aparezca la energía cinética más la potencial, que es lo que esperaríamos naturalmente.

Llamemos H a la energía

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -\nabla_{\vec{r}} H$$

Si queremos que la masa m solo aparezca en la aplicación H y no sea una constante agregada podemos pensar en $\vec{p} = m\vec{v}$ y tenemos

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\nabla_{\vec{r}} H$$

y, la tasa de cambio de $\vec{r}$ en el tiempo podríamos escribirla como (si no queremos introducir la constante m de nuevo)

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \quad \nabla_{\vec{p}} H$$

Entonces, pensamos H como función de $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (y del tiempo)

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}, t)$$

Esta es otra formulación de la mecánica clásica que se conoce como mecánica hamiltoniana (la aplicación H se conoce como el hamiltoniano).

2.3. Formulación hamiltoniana vs. lagrangiana

Tenemos una relación entre la mecánica de Newton y la Lagrangiana, también entre la de Newton y la Hamiltoniana, pero no tenemos una manera

de pasar directamente de la Lagrangiana a la Hamiltoniana. Intentemos una manera

Imaginemos que ya conocemos el lagrangiano L y queremos obtener un hamiltoniano H que describa exactamente lo mismo. Lo que no podemos usar ahora es la masa pues solo contamos con el lagrangiano y las ecuaciones que satisface la solución. Necesitamos definir la cantidad de movimiento partiendo tan solo de L. Un candidato claro sería

$$\vec{p} = \nabla_{\vec{v}} L$$

Ahora, para conseguir el Hamiltoniano necesitariamos que $\vec{v}$ sea función de $\vec{p}$ que es lo que vamos a asumir (esto se consigue si, por ejemplo, L es convexo o cóncavo en $\vec{v}$). De manera directa, lo que tendríamos que hacer es

$$H = mv^2 - L$$

pero, si queremos usar lo que tenemos podríamos separarlo en dos

$$H = m\vec{v} \cdot \vec{v} - L = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$$

Notamos que esta definición solamente depende del Lagrangiano (y de la capacidad de escribir la velocidad en función del momento). Ahora veamos en qué se traduce el principio variacional. Sea α una curva que lo satisface, entonces

$$\begin{aligned} dH &= d\vec{p} \cdot \vec{v} + \vec{p} \cdot d\vec{v} - dL \\ &= d\vec{p} \cdot \vec{v} + \vec{p} \cdot d\vec{v} - \nabla_{\vec{r}} L \cdot d\vec{r} - \nabla_{\vec{v}} L \cdot d\vec{v} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Ahora, usaremos la definición de $\vec{p}$ y el hecho de que estamos en una curva que satisface el principio variacional

$$\begin{aligned} dH + \frac{\partial L}{\partial t} dt &= d\vec{p} \cdot \vec{v} + \vec{p} \cdot d\vec{v} - \nabla_{\vec{r}} L \cdot d\vec{r} - \vec{p} \cdot d\vec{v} \\ &= d\vec{p} \cdot \vec{v} - \nabla_{\vec{r}} L \cdot d\vec{r} \\ &= d\vec{p} \cdot \vec{v} - \frac{d}{dt} \nabla_{\vec{v}} L \cdot d\vec{r} \\ &= d\vec{p} \cdot \frac{d}{dt}\vec{r} - \frac{d}{dt}\vec{p} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Todo resultó como queríamos

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \quad \nabla_{\vec{p}} H$$
$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\nabla_{\vec{r}} H$$

Por último, desarrollemos el ejemplo más importante para nosotros

Ejemplo (Electromagnetismo)**.** *Consideremos un campo eléctrico $\vec{E}$ y uno magnético $\vec{B}$. Notemos que de las ecuaciones*

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

es plausible esperar que existan $\vec{A}$ y ϕ tales que

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \nabla\phi$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Recordemos que para una partícula de carga q en dichos campos eléctrico y magnético

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times B)$$

Veamos si dicha ecuación puede resultar de un principio variacional, es decir, busquemos un lagrangiano. Lo primero que deberíamos hacer es considerar los potenciales $\vec{A}$ y ϕ pues los términos que aparecen en la ecuación debería ser derivadas.

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = \nabla(q\phi) + q\left(\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

Necesitamos, entonces, escribir $\vec{v} \times \nabla \times \vec{A}$ de otra forma

$$\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} = \nabla_{\vec{r}}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}})\vec{A}$$

y la derivada parcial de $\vec{A}$ en el tiempo también

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}})\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

Con esto, podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}) = \nabla_{\vec{r}}\,(q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Esto indica que podemos elegir el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{v}\cdot A + q\phi$$

Ahora, para conseguir el hamiltoniano necesitamos

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

con lo que el hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\cdot\vec{v} - L \\ &= (m\vec{v} + q\vec{A})\cdot\vec{v} - (\frac{1}{2}mv^2 + q\vec{v}\cdot A + q\phi) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - q\phi \\ &= \frac{1}{2}(\vec{p} - q\vec{A})^2 - q\phi \end{aligned}$$

Capítulo 3

Relatividad especial

Ahora regresamos a una de las simetrías consideradas anteriormente. Las leyes de Maxwell no deberían depender de un sistema de referencia particular. Una de las motivaciones para ello es la ley de Faraday con la que la producción de un campo eléctrico parece querer «contrarrestar» el cambio de sistema.

Un problema es que ambos campos, en ausencia de fuentes, se comportan como ondas que se propagan a la velocidad de la luz c. Si queremos que las leyes no dependan de un sistema de referencia en particular, la velocidad de la luz debería ser la misma para cada uno de los sistemas de referencia considerados. Si consideramos un haz de luz que viaja del punto (x_i, y_i, z_i) en el tiempo t_i al punto (x_f, y_f, z_f) en el tiempo t_f, entonces se cumple

$$\frac{\sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2}}{t_f - t_i} = c$$

Lo que exigimos es que, si cambiamos de sistema de referencia a uno donde las coordenadas anteriores sean $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ en el tiempo $\tilde{t}_i$ y $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f, \tilde{z}_f)$ en el tiempo $\tilde{t}_f$, también se cumpla

$$\frac{\sqrt{(\tilde{x}_f - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_f - \tilde{y}_i)^2 + (\tilde{z}_f - \tilde{z}_i)^2}}{\tilde{t}_f - \tilde{t}_i} = c$$

Para simplificar elegimos unidades tal que $c = 1$. Un posible cambio de sistema de referencia sería una biyección de $\mathbb{R}^4$ en sí mismo que satisfaga lo mencionado. Los casos más sencillos serían traslaciones y reescalamientos positivos. Obviando estos, Erik Christopher Zeeman (ver apéndice E) demostró que lo que tenemos esencialmente es aplicaciones lineales que preservan la forma cuadrática

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$(t, x, y, z) \to t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Para facilitarnos el trabajar con esta forma cuadrática consideramos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$\langle (t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2) \rangle = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

que es la única forma bilineal simétrica tal que $Q(v) = \langle v, v \rangle$. Notemos que una aplicación lineal preserva tal forma bilineal si y solo si preserva la forma cuadrática. Esto se sigue de que

$$\langle u, v \rangle = \frac{Q(u+v) - Q(u) - Q(v)}{2}$$

Con el teorema de Zeeman en mente pensaremos en los cambios de sistema de referencia como cambios de coordenadas ortonormales. Entonces, consideramos que tenemos un espacio vectorial V de dimensión 4 al que hemos dotado de una forma bilineal tal que existe alguna base en la que esta se ve como la forma definida antes. Para establecer mejor esta afirmación consideremos unas definiciones.

3.1. Espacio-tiempo de Minkowski

Definición 3.1. *Sea V un espacio vectorial real y sea B una forma bilineal simétrica en V. Se dice que dicha forma bilineal es no degenerada si para todo $x \in V$ se cumple que*

$$[\forall v \in V : B(x, v) = 0] \Longrightarrow x = 0$$

Notar que, para una forma bilineal B, la condición de no degeneración es exactamente la condición de que la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{B} : & V \to V^* \\ & x \mapsto B(x, \cdot) \end{aligned}$$

es inyectiva.

Proposición 3.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y B una forma bilineal simétrica no degenerada en V. Existe una base $\{e_i\}$ tal que*

$$|B(e_i, e_j)| = \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Tales bases serán llamadas bases ortonormales.

Demostración. Si V tiene dimensión uno, el resultado se sigue de que la forma es no nula. Asumimos que podemos encontrar una base ortogonal si la dimensión del espacio es k, queremos verificar que se puede hacer si la dimensión es $k+1$. Como la forma es simétrica y no cero (pues es no degenerada), existe $u \in V$ tal que $B(u,u) \neq 0$. Podemos asumir que $|B(u,u)| = 1$, con lo que haríamos $e_1 = u$. Consideramos el espacio ortogonal $e_1^{\perp} = \{v \in V/\ B(v, e_1) = 0\}$ que tiene dimensión k y no contiene a e_1 (y por lo tanto, la forma B restricta a él sigue siendo no degenerada). Tomamos una base ortonormal en ese espacio y la completamos con e_1 con lo que tenemos una base ortonormal de todo el espacio. □

En la prueba anterior dijimos que el espacio ortogonal tiene dimensión k. Lo que ocurre es que si tomamos un subespacio W de V y definimos

$$W_{aniq} = \{\omega \in W^*/\ \forall x \in W : \omega(x) = 0\}$$

entonces es fácil ver que (por el teorema fundamental de homomorfismos)

$$W_{aniq} = (V/W)^*$$

Entonces, la dimensión de W_{aniq} es complementaria a la de W (si V es de dimensión finita). Por último podemos observar que

$$\tilde{B}(W^{\perp}) = W_{aniq}$$

donde estamos considerando que

$$W^{\perp} = \{v \in W/\ \forall x \in W : B(v, x) = 0\}$$

Proposición 3.2. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y B una forma bilineal simétrica no degenerada en V. Dadas dos bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$ se cumple que*

$$\#\{i/B(e_i, e_i) = 1\} = \#\{i/B(f_i, f_i) = 1\}$$

es decir, la cantidad de elementos 'positivos' (y, por lo tanto, la de 'negativos') en una base ortonormal no depende de la base

Demostración. Sean $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$ dos bases ortonormales, definimos

$P_e =$ espacio vectorial generado por los elementos positivos de $\{e_i\}$

$N_e =$ espacio vectorial generado por los elementos negativos de $\{e_i\}$

$P_f =$ espacio vectorial generado por los elementos positivos de $\{f_i\}$

$N_f =$ espacio vectorial generado por los elementos negativos de $\{f_i\}$

Notamos que

$$V = P_e \oplus N_e = P_f \oplus N_f$$

y lo que afirma la proposición es $\dim P_e = \dim P_f$. De no ser este el caso, por ejemplo,

$$\dim P_e > \dim P_f$$

lo que implica que

$$\dim N_f + \dim P_e > \dim N_f + \dim P_f = \dim V$$

pero $N_f \cup P_e = \{0\}$, por lo que esto no sería posible. □

A la cantidad de elementos positivos de una base ortonormal la llamaremos índice de la forma bilineal.

Definición 3.2. *Decimos que un espacio vectorial V junto con una forma bilineal B es un espacio-tiempo de Minkowski si B es una forma simétrica no degenerada de índice uno.*

Podemos imaginar a un espacio-tiempo de Minkowski como nuestro universo. Tomar una base ortonormal correspondería a elegir un sistema de referencia inercial. De esta manera cambiar de sistema de referencia sería un cambio de base ortonormal.

3.2. Clasificación de vectores

En un espacio-tiempo de Minkowski podemos encontrar tres tipos de vectores diferentes

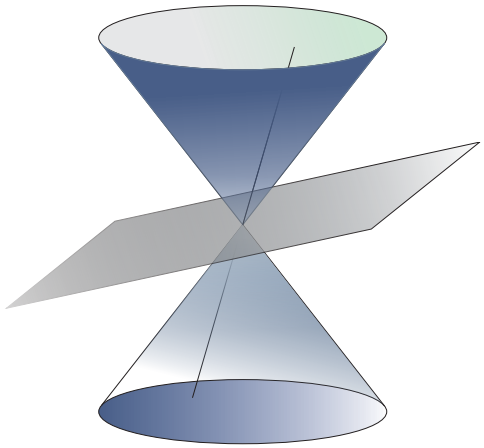

Figura 3.1: El interior del cono está hecho de vectores temporales, el borde de vectores de luz y el exterior de vectores espaciales. Mostramos una separación de un espacio-tiempo de Minkowski (de dimensión 3) en un subespacio espacial y uno temporal.

Definición 3.3. *Sea V un espacio-tiempo de Minkowski. Sea $v \in V$*
Si $B(v,v) > 0$ diremos que el vector v es temporal
Si $B(v,v) < 0$ diremos que v es espacial
Si $B(v,v) = 0$ diremos que v es un vector de luz

Por simplicidad, si tenemos un vector v y consideramos una base ortonormal, a las coordenadas de dicho vector las denotaremos por (v_0, v_1, v_2, v_3) siendo la primera coordenada el tiempo (la asociada al vector positivo de la base)

Proposición 3.3. *Sea V un espacio-tiempo de Minkowski. Sean $a, b \in V$.*
Si $a - b$ es temporal, existe un sistema de referencia en el que a y b se encuentran en el mismo punto del espacio, es decir, $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, 3$.
Si $a - b$ es espacial, existe un sistema de referencia en el que a y b son simultáneos, es decir, $a_0 = b_0$.

Demostración. Si $a - b$ es temporal consideramos un sistema de referencia con e_0 proporcional a $a - b$. Si $a - b$ es espacial consideramos un sistema de rerferencia con e_1 proporcional a $a - b$. □

Notar que, para a y b separados temporalmente no existe un sistema en el que sean simultáneos, esto es, están verdaderamente separados en el tiempo. Si a y b se encuentran separados espacialmente no existe un sistema en el que estén ubicados en el mismo punto del espacio, es decir, están verdaderamente separados espacialmente.

Si $a-b$ es temporal, para que una partícula conecte a con b deberá viajar a una velocidad menor que la de la luz. Si es espacial, no sería posible que una partícula real los conecte pues en algún sistema a y b serían simultáneos. Esto sugiere que ninguna partícula puede viajar a una velocidad mayor que la de la luz.

Una cuestión también importante es la noción de orientación temporal con la que contamos todos. Para ello denotamos por T al conjunto de todos los vectores temporales y notamos la siguiente

Proposición 3.4. *T tiene dos componentes conexas. Es más, u y v están en la misma componente conexa si y solo si $\langle u, v \rangle > 0$*

Demostración. Por ser T abierto tenemos que las componentes conexas son las componentes conexas por caminos. Notemos que si $\langle u, v \rangle > 0$ entonces $\forall s, t \in [0, 1]$ con $s + t = 1$

$$\langle su + tv, su + tv \rangle = \langle su, su \rangle + 2 \langle su, tv \rangle + \langle tv, tv \rangle > 0$$

esto es, se pueden conectar por un segmento. Por otro lado, si

$$\langle u, v\rangle \leq 0$$

entonces, de existir un camino continuo α en T tal que

$$\alpha(0) = u, \qquad \alpha(1) = v$$

tenemos que la aplicación continua

$$t \mapsto \langle u, \alpha(t)\rangle$$

es positiva en $t = 0$ y no positiva en $t = 1$ por lo que existe un instante en el que es cero lo que sería imposible pues dos vectores temporales no pueden ser ortogonales (de lo contrario podríamos obtener una base con más de un elemento positivo). □

Con el hecho de que T tenga dos componentes conexas podemos definir el futuro como una de ellas a la que denotaremos por T^+. En este caso diremos que nuestro espacio-tiempo está orientado temporalmente.

3.3. Partícula (clásica relativista)

Definición 3.4. *Sea $\alpha : [s_i, s_f] \to V$ una aplicación C^∞. Se dice que α es una partícula si para todo $s \in [s_i, s_f]$*

$$\frac{d}{ds}\alpha(s) \in T^+$$

Una pregunta justa es ¿cómo mide el tiempo una partícula? Si una partícula α es una recta temporal, es decir,

$$\alpha(s) = \hat{t}s$$

para algún vector $\hat{t}$ temporal unitario, el tiempo que experimenta la partícula entre s_1 y s_2 sería

$$s_2 - s_1 = B(\alpha(s_2) - \alpha(s_1), \hat{t}) = \sqrt{Q(\alpha(s_2) - \alpha(s_1))}$$

Si la partícula ya no viaja en línea recta, podemos imaginarla compuesta de varios tramos rectos. En tal caso el tiempo entre s_1 y s_2 sería

$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{Q\left(\frac{d}{ds}\alpha\right)}\mathrm{ds}$$

lo que podríamos formular con sumas de Riemann del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{Q(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))}$$

Nos sería útil, entonces darle una parametrización a una partícula tal que su parámetro haga referencia al tiempo que experimenta. Para esto notamos que la aplicación

$$\tau : [s_i, s_f] \to \mathbb{R}$$
$$s \mapsto \int_{s_i}^{s} \sqrt{Q\left(\frac{d}{ds}\alpha\right)}\mathrm{ds}$$

tiene derivada no nula, con lo que es invertible con inversa diferenciable. Entonces, $\alpha \circ \tau^{-1}$ sería la partícula parametrizada por su propio tiempo. Lo que caracteriza a una parametrización de este tipo es que

$$Q\left(\frac{d}{d\tau}\alpha\right) = 1$$

Fijémonos en lo que sería $d\alpha/d\tau$ en algún sistema de referencia. Dado un sistema de referencia, α tiene una parametrización natural por el tiempo del sistema. Según esta parametrización la derivada de la curva es

$$(1, \vec{v})$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula en dicho sistema. Entonces, en dicho sistema

$$\frac{d}{d\tau}\alpha = \gamma(1, \vec{v})$$

en los puntos correspondientes. Con esto y la condición dada para parametrización por tiempo propio obtenemos

$$\gamma^2(1 - v^2) = 1$$

o, equivalentemente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Notamos que γ es muy pequeño si v es muy pequeño (comparado con la velocidad de la luz $c = 1$) y que se aproxima a infinito cuando v se aproxima a uno. Podemos escribir también $\gamma d\tau = dt$.

Le otorgamos una característica importante a una partícula α, su masa m. Con esto, si α está parametrizada por tiempo propio, definimos su momento como

$$P : [0, \tau_f] \to V$$
$$\tau \mapsto m\frac{d}{d\tau}\alpha(\tau)$$

En un sistema de referencia, el momento se verá como

$$(E, \vec{p}) = (\gamma m, \gamma m \vec{v})$$

La segunda cantidad será aproximadamente la cantidad de movimiento conocida $m\vec{v}$ y la primera cantidad cantidad

$$\gamma m = m + \frac{1}{2}mv^2 + ...$$

se interpreta como la energía, pues considerando términos hasta v^2 tenemos que es la energía cinética más la masa. La masa sería la energía que tiene la partícula de manera natural, sin encontrarse en movimiento. Se postula, entonces, que, si tenemos varias partículas, la cantidad de movimiento total se va a conservar en el tiempo.

Algo también interesante es que se cumple un análogo a la desigualdad de Cauchy Schwarz. Si u y v son dos vectores temporales orientados hacia el futuro entonces, extendemos $\frac{u}{\sqrt{Q(u)}}$ a una base con lo que tenemos, en esas coordenadas

$$\langle u, v\rangle^2 = (u_0 v_0)^2 \geq u_0^2(v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) = \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle$$

es decir, se cumple lo opuesto a la desigualdad de Cauchy Schwarz.

De esto obtenemos que si u y v son temporales orientados hacia el futuro entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \geq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

con lo que se satisface lo opuesto de la desigualdad triangular.

Conocido esto podemos definir el tiempo propio como el supremo de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{Q(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))}$$

y es fácil ver que la recta es la que maximiza el tiempo propio.

Con ello notamos que una acción natural sería el tiempo propio de la partícula. Al maximizarlo se describe un movimiento uniforme. Si queremos pensar en minimizar la acción, podríamos considerar el opuesto del tiempo propio.

Por último, para realizar una comparación con la mecánica no relativista, en un sistema de referencia inercial la acción se vería como

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\gamma} dt$$

y, si multiplicamos por la masa m, el lagrangiano sería

$$-m/\gamma$$

que, como podemos ver, contiene a la energía cinética no relativista en su expansión en serie de potencias

$$-m/\gamma = -m\sqrt{1-v^2} = -m + \frac{1}{2}mv^2 - ...$$

Capítulo 4

El campo electromagnético

Ahora ya estamos listos para considerar nuevamente el campo eléctrico y magnético, pero ahora para intentar fusionarlos en un solo objeto definido en nuestro espacio-tiempo.

Primero requerimos una simplificación: En un sistema de referencia adecuado, con $c = 1$ (y $\epsilon_0 = 1$), las ecuaciones de Maxwell se ven como sigue

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Procederemos intuitivamente para lograr fusionar los campos. Como antes:

De $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ deberíamos obtener $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ para algún campo $\vec{A}$.

De $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, obtenemos $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t + \nabla \phi$ para algún ϕ.

Si combinamos ambos campos $\vec{A}$ y ϕ en una 1-forma

$$\mathcal{A} = \phi dt + A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

podemos notar que su derivada exterior nos da la información de los campos eléctrico y magnético

$$d\mathcal{A} = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt +$$

$$B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

Esta 2-forma será denotada por $\mathcal{F}$ y llamada tensor electromagnético.

Inmediatamente tenemos dos de las ecuaciones de Maxwell (de las que obtuvimos $\vec{A}$ y ϕ) que se traducen en

$$d\mathcal{F} = 0$$

Para obtener las otras dos ecuaciones nos es conveniente intercambiar las posiciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en $\mathcal{F}$ (puesto que ahora necesitamos tomar el rotacional de $\vec{B}$ y el divergente de $\vec{E}$)

Definimos

$$*\mathcal{F} = E_1 dy \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy$$

$$-B_1 dx \wedge dt - B_2 dy \wedge dt - B_3 dz \wedge dt$$

y notamos que

$$d * \mathcal{F} = \rho dx \wedge dy \wedge dz - J_1 dy \wedge dz \wedge dt - J_2 dz \wedge dx \wedge dt - J_3 dx \wedge dy \wedge dt$$

A esta última forma la llamaremos 3-forma densidad de corriente y la denotaremos por $\mathcal{J}$. Notamos que para poder escribir las ecuaciones de Maxwell de una manera invariante bastaría con definir $*\mathcal{F}$ de alguna manera intrínseca usando la forma bilineal.

La aplicación $*$ que necesitamos es lineal y hace lo siguiente

$$\begin{aligned} dx \wedge dt &\mapsto \quad dy \wedge dz \\ dy \wedge dt &\mapsto \quad dz \wedge dx \\ dz \wedge dt &\mapsto \quad dx \wedge dy \\ dy \wedge dz &\mapsto - \; dx \wedge dt \\ dz \wedge dx &\mapsto - \; dy \wedge dt \\ dx \wedge dy &\mapsto - \; dz \wedge dt \end{aligned}$$

Esto es, a $da_\alpha \wedge da_\beta$ le corresponde $da_\gamma \wedge da_\delta$ si

$$da_\alpha \wedge da_\beta \wedge da_\gamma \wedge da_\delta = \pm dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Notamos que solo en el caso que da_β es dt el signo correspondiente es menos. Esto lo podemos enunciar usando la forma bilineal de la siguiente manera

$$da_\alpha \wedge da_\beta \wedge da_\gamma \wedge da_\delta = \langle da_\alpha \wedge da_\beta, da_\alpha \wedge da_\beta \rangle \, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Entonces, para cada ω de esa forma se cumple

$$\omega \wedge *\omega = \langle \omega, \omega \rangle \, vol$$

donde $vol = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$

Lo anterior no determina $*\omega$. Para determinarlo faltaría ver cómo interactúa con los demás.

Si ν es una de las formas anteriores y $\nu \neq \omega$ entonces podemos notar que $\nu \wedge *\omega = 0$, con lo que

$$\nu \wedge *\omega = \langle \nu, \omega \rangle \, vol$$

Como $*$ es lineal, esta propiedad se cumple para cualesquiera 2-formas ω y ν. Podemos darnos cuenta de que esta definición tiene sentido si ν y ω son k-formas pero en este caso $*\omega$ sería una $(n-k)$-forma donde n es la dimensión del espacio.

Notamos que α, una $(n-k)$-forma en V (dim V = n), actúa en $\bigwedge^k(V^*)$ como

$$\hat{\alpha} : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^n(V^*)$$
$$\omega \mapsto \omega \wedge \alpha$$

Como $\bigwedge^n(V^*)$ tiene dimensión uno, al elegir un elemento diferente de cero hemos elegido un isomorfismo con $\mathbb{R}$ y, en tal caso, $\hat{\alpha}$ se puede ver como un funcional lineal.

Lo que sería interesante es que la aplicación

$$\bigwedge^{n-k}(V^*) \to \mathcal{L}\left(\bigwedge^k(V^*) \, , \, \bigwedge^n(V^*)\right)$$
$$\alpha \mapsto \hat{\alpha}$$

sea un isomorfismo. De ahí, al elegir una n-forma obtenemos un isomorfismo $\bigwedge^{n-k}(V^*) \cong \bigwedge^k(V)$.

Ya que las dimensiones coinciden bastaría verificar la inyectividad de dicha aplicación. Esto es bastante sencillo de lograr si elegimos una base inducida por alguna base de V^*. Esto es, si $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ es una base de V^* consideramos la base $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_{n-k}}\}_{i_1 < i_2 < ... < i_n}$. Si

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_n} \alpha_{i_1, i_2, ..., i_{n-k}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_{n-k}}$$

es diferente de cero, existen $j_1 < j_2 < ... < j_{n-k}$ con $\alpha_{j_1, j_2, ..., j_{n-k}} \neq 0$ entonces si $\{h_1, h_2, ..., h_k\}$ es tal que $\{j_1, j_2, ..., j_{n-k}\} \cup \{h_1, h_2, ..., h_k\} = \{1, 2, ..., n\}$, se cumplirá

$$(dx_{h_2} \wedge ... \wedge dx_{h_{(n-k)}}) \wedge \alpha = \pm \alpha_{j_1, j_2, ..., j_{(n-k)}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \neq 0$$

Con esto, una n-forma vol no nula genera un isomorfismo entre $\bigwedge^{n-k}(V^*)$ y $\bigwedge^k(V)$. Un producto interno en V genera un producto interno en $\bigwedge^k(V)$ lo que genera un isomorfismo entre $\bigwedge^k(V)$ y $\bigwedge^k(V^*)$ mediante

$$\alpha \mapsto \langle \cdot\, , \alpha \rangle$$

En conclusión tenemos un isomorfismo $*$ entre $\bigwedge^{n-k}(V^*)$ y $\bigwedge^k(V^*)$ y la propiedad que cumplen es

$$\nu \wedge *\omega = \langle \nu, \omega \rangle \, vol$$

Cuando consideramos un producto interno se suele elegir la n-forma vol tal que $|\langle vol, vol \rangle| = 1$.

Explícitamente, si escogemos una base ortonormal $\{dx_1, ..., dx_n\}$ tal que $vol = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ entonces aplicar $*$ a $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ es elegir $dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}$ de manera que

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}} = vol$$

y contar cuantos dx_i hay en $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ tal que $\langle dx_i, dx_i \rangle = -1$. Si esa cantidad es par el resultado es $dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}$ y si es impar, $-dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}$.

De este algoritmo es fácil ver que $*$ es una transformación ortogonal y que, en k-formas

$$* \circ * = (-1)^{k(n-k)+(n-indice)}$$

Definición 4.1 (Dual de Hodge)**.** *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ y una n-forma vol tal que $|\langle vol, vol \rangle| = 1$. El dual de Hodge de una k-forma ω será la $(n-k)$-forma $*\omega$ que cumple que, para toda k-forma ν*

$$\nu \wedge *\omega = \langle \nu, \omega \rangle \, vol$$

En resumen, las ecuaciones de Maxwell son

$$d\mathcal{F} = 0 \qquad\qquad d * \mathcal{F} = \mathcal{J}$$

La ley de continuidad es

$$d\mathcal{J} = 0$$

y las ecuaciones de onda están guardadas en

$$d * d * \mathcal{F} + *d * d\mathcal{F} = \left(\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B \right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E \right) \wedge dt = 0$$

donde

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$
$$E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

En el capítulo 1 vimos que una onda electromagnética sinusoidal sería

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot r)$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot r)$$

En este contexto, lo anterior se vería como

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cos \langle k \cdot r \rangle$$

donde $\mathcal{F}_0 = E_0 \wedge dt + B_0$, la frecuencia y el vector de onda estarían unidos en $k = (\omega, \vec{k})$ y r sería $(t, \vec{r})$. Con esto, k sería mejor entendido como un vector en el espacio-tiempo de Minkowski.

Finalmente, busquemos una acción que nos ayude a describir el movimiento de una partícula en un campo electromagnético. Recordemos que el Lagrangiano en el caso no relativista era

$$\frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A} \cdot v + q\phi$$

que nos da la idea de considerar como acción a la suma del tiempo propio (por la masa) y la integral de $q\mathcal{A}$ sobre la partícula. Con esto el Lagrangiano sería

$$-m/\gamma + q\vec{A} \cdot v + q\phi$$

Esta acción nos lleva a ecuaciones interesantes:

Consideremos una curva que hace la acción estacionaria $\alpha : [t_i, t_f] \to V$ parametrizada según el tiempo de un sistema de referencia. Tomemos una curva $\epsilon : [t_i, t_f] \to V$ con $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) = 0$ y consideremos la familia de curvas $\alpha + s\epsilon$ parametrizadas por s. Calculemos la derivada de la acción en $s = 0$.

$$\frac{d}{ds} \int \left[-\frac{m}{\sqrt{1 - (\dot{\alpha} + s\dot{\epsilon})^2}} + q\mathcal{A}_{\alpha(t)+s\epsilon(t)}(\dot{\alpha}(t) + s\dot{\epsilon}(t)) \right] dt$$
$$= \int \left[-\frac{m \langle \dot{\epsilon}, \dot{\alpha} \rangle}{\sqrt{1 - \dot{\alpha}^2}} + q d\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\epsilon(t), \dot{\alpha}(t)) + q\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\dot{\epsilon}(t)) \right]$$

donde $d\mathcal{A}$ es la derivada usual (no derivada exterior). Para distinguir denotaremos, en esta parte, por d_E a la derivada exterior. Como $\mathcal{A}$ es una 1-forma

$$\mathcal{A} : V \to \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$$

y su derivada sería

$$d\mathcal{A} : V \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R}))$$

a la que podemos ver como la aplicación

$$d\mathcal{A} : V \to \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$$

$$d\mathcal{A}_x(u)(v) = d\mathcal{A}_x(u, v)$$

Notamos que

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\epsilon(t))\right] = d\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \epsilon(t)) + \mathcal{A}_{\alpha(t)}(\dot{\epsilon}(t))$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{t_f} \left[-\frac{m\left\langle \dot{\epsilon}, \dot{\alpha} \right\rangle}{\sqrt{1-\dot{\alpha}^2}} + q d\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\epsilon(t), \dot{\alpha}(t)) + q\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\dot{\epsilon}(t)) \right] dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[\left\langle \epsilon, \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\alpha}}{\sqrt{1-\dot{\alpha}^2}} \right) \right\rangle + q d\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\epsilon(t), \dot{\alpha}(t)) - q d\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \epsilon(t)) \right] dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[\left\langle \epsilon, \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\alpha}}{\sqrt{1-\dot{\alpha}^2}} \right) \right\rangle + q d_E\mathcal{A}_{\alpha(t)}(\epsilon(t), \dot{\alpha}(t)) \right] dt
\end{aligned}$$

Entonces, si denotamos por F a la aplicación

$$\langle u, Fv \rangle = \mathcal{F}(u, v)$$

la ecuación de movimiento (es decir, hacer la integral anterior igual a cero para todo ϵ) sería

$$\frac{d}{dt}P + qF(\vec{v}, 1) = 0$$

o, equivalentemente (multiplicando por γ),

$$\frac{d}{d\tau}P + qFv = 0$$

donde la partícula está parametrizada por tiempo propio, v es su velocidad (en tiempo propio) y P es la cantidad de movimiento en tiempo propio ($P = mv$).

Capítulo 5

Coderivada y el lagrangiano electromagnético

De la misma manera que podemos describir el movimiento de una partícula con ayuda de un principio variacional, queremos describir el campo electromagnético. Primero en ausencia de fuentes.

La ecuación $dF = 0$ implica que $F = dA$ (dominio $\mathbb{R}^4$), entonces el problema termina siendo encontrar una 1-forma tal que

$$d * dA = 0$$

En esta ocasión nos dejaremos guiar por la siguiente idea (que usamos en el capítulo 2)

Para saber que una cantidad es cero verificamos que, al multiplicarla con cualquier otra cantidad, el resultado es cero.

Para este caso deberíamos considerar como producto a

$$\int \langle \cdot, \cdot \rangle \, vol$$

Definición 5.1. *Sean M una variedad diferenciable, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica pseudoriemanniana y vol una n-forma compatible con la métrica. Dadas $\omega, \nu \in \Omega^k(M)$, definimos*

$$(\omega, \nu) = \int \langle \omega, \nu \rangle \, vol$$

si la expresión tiene sentido

Como motivación tenemos el siguiente

Recordatorio. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, B una forma bilineal simétrica en V y Q su forma cuadrática asociada. Entonces*

$$\forall a, x \in V : dQ_a \cdot x = 2B(a, x)$$

La forma cuadrática Q haría las veces de la acción, el vector a sería el potencial A y las variaciones x serían 1-formas γ. La aplicación B debería incluir $d * d$. El primer intento sería considerar

$$B(\gamma, A) = (\gamma, d * dA)$$

pero esto no tendría sentido (o sería cero) pues γ es una 1-forma y $d * dA$ es una 3-forma. Notamos que nos sirve más pensar en

$$*d * dA = 0$$

con lo que

$$B(\gamma, A) = (\gamma, *d * dA)$$

Un requisito en el «recordatorio» era que B sea simétrica. Esto sería cierto si, por ejemplo, $*d*$ fuera la adjunta de d.

Proposición 5.1. *Sea M^m una variedad pseudoriemanniana con índice i.*
$\forall \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^4),\ \nu \in \Omega^{k+1}(M)$ *de soporte compacto*

$$\int \langle d\omega, \nu \rangle \, vol = \int \left\langle \omega, (-1)^{1+mk+m-i} * d * \nu \right\rangle vol$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{R}^4} \langle d\omega, \nu \rangle \, vol = \int_{\mathbb{R}^4} d\omega \wedge *\nu$$

y, para pasar el operador d al lado derecho usamos que

$$d(\omega \wedge *\nu) = d\omega \wedge *\nu + (-1)^k \omega \wedge d * \nu$$

Como las formas son de soporte compacto

$$\int_{\mathbb{R}^4} d(\omega \wedge *\nu) = 0$$

y, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^4} d\omega \wedge *\nu &= (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^4} \omega \wedge d * \nu \\
&= (-1)^{k+1}(-1)^{(m-k)k+m-i} \int_{\mathbb{R}^4} \omega \wedge * * d * \nu \\
&= (-1)^{1+mk+m-i} \int_{\mathbb{R}^4} \langle \omega, *d * \nu \rangle \, vol
\end{aligned}$$

□

Definición 5.2. *Al operador encontrado antes lo llamaremos codiferencial y lo denotaremos por δ.*

En este caso $k = 2$, $m = 4$ e $i = 1$ por lo que

$$\delta = *d*$$

Tenemos nuestra propuesta de acción

$$Q(A) = \int_{\mathbb{R}^4} \langle A, \delta dA \rangle$$

para que solo dependa de una derivada de A, podríamos considerar

$$Q(A) = \int_{\mathbb{R}^4} \langle dA, dA \rangle$$

que debería dar el mismo principio variacional.

Tomamos, entonces, el lagrangiano como

$$\mathcal{L} : \Omega^1(M) \to \Omega^n(M)$$

$$A \mapsto \langle dA, dA \rangle \, vol$$

y el problema variacional como

Problema. *Para todo abierto $X \subset M$ con borde C^∞ se cumple que, para cualquier $\gamma \in \Omega^1(\bar{X})$ tal que $\gamma|_{\partial X} = 0$*

$$\frac{d}{ds}\left[\int_X \mathcal{L}(A + s\gamma)\right]|_{s=0} = 0$$

esto es, A es un extremal de la acción generada por el lagrangiano.

Teorema 5.1. *Una 1-forma A es solución del problema si y solo si $\delta dA = 0$*

Demostración. Para $p \in M$ tomemos una vecindad X con borde C^∞. Tomemos $\gamma \in \Omega^1(\bar{X})$ arbitraria tal que $\gamma|_{\partial X} = 0$. Entonces,

$$\int_X \mathcal{L}(A + s\gamma) = \int_X \langle dA + sd\gamma, dA + sd\gamma \rangle \; vol$$

$$= \int_X \langle dA, dA \rangle \; vol + 2s \int_X \langle dA, d\gamma \rangle \; vol + s^2 \int_X \langle d\gamma, d\gamma \rangle \; vol$$

Su derivada en cero sería

$$2\int_X \langle dA, d\gamma\rangle \ vol$$

Por la definición de δ y el teorema de Stokes, la condición es

$$\forall \gamma \in \Omega^1(\bar{X}), \gamma|_{\partial X} = 0 : \int_X \langle \delta dA, \gamma\rangle \ vol = 0$$

Debido a la no degeneración del producto interno esta condición es equivalente a

$$\delta dA = 0$$

□

Si le agregamos una corriente J, entonces el lagrangiano que podemos considerar es

$$\mathcal{L} : \Omega^1(M) \to \Omega^n(M)$$
$$A \mapsto A \wedge J - \frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle \, vol$$

Capítulo 6

Mecánica Cuántica

Con las ecuaciones de Maxwell se concibió a la luz como una onda que se propaga por el espacio. Hasta ese entonces, el punto de vista predominate era el de Newton que pensaba en un haz de luz como un haz de corpúsculos (partículas) y que opacaba el defendido por Huygens que sí la pensaba como una onda. Ya todo estaba dicho, no habían más dudas: lo que entendíamos como luz eran las oscilaciones del campo electromagnético.

Sin embargo, habían fenómenos que no encontraban una explicación en este contexto. Según las ecuaciones de Maxwell, la luz era un fenómeno continuo y, por lo tanto, su energía se propagaba de manera continua. Sin embargo, en 1900 Max Planck propuso, para explicar la luz emitida de manera natural por algún cuerpo, que las energías se emitían en forma discreta. En 1905, Einstein usó esta misma idea pero ahora atribuyéndole a la luz un carácter corpuscular: Esta estaba compuesta de pequeños paquetes de energía. Según él un haz de luz de frecuencia ν estaba compuesto de paquetes de energía $h\nu$ con h la constante introducida por Planck en su teoría.

En 1923, Arthur Compton, extendiendo estas ideas, explicó otro fenómeno que aún no tenía explicación. Al hacer incidir luz sobre un objeto, esta interactúa con los electrones de sus átomos y se desvía (ver figura 6.1); lo extraño es que, dependiendo del ángulo de desviación, sufre un cambio en la longitud de onda. Generalizando las ideas que había propuesto Einstein, Arthur Compton postula que la luz tiene una energía y una cantidad de movimiento (espacial) igual a

$$E = \hbar\omega \quad \text{(postulada por Einstein)}$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

donde $\hbar = h/2\pi$ es conocida como la constante de Planck reducida.

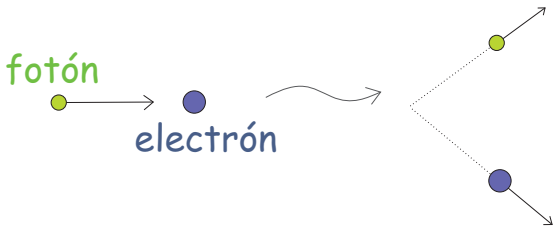

Figura 6.1: A la izquierda: Una partícula de luz (fotón) se aproxima a un electrón. A la derecha: El fotón interactúa con el electrón y ambos se desvían.

Postular dicha cantidad de movimiento tiene sentido pues

$$p = \hbar(\omega, \vec{k})$$

define un verdadero vector de luz como vimos en el capítulo sobre el campo electromagnético.

Luego de postular dicho vector como el momento de una partícula de luz usa la conservación de la cantidad de movimiento para obtener el cambio de longitud de onda.

Este resultado fue la razón más fuerte por la que se empezó a creer que la luz no era ni una onda ni una partícula sino un ente diferente que tenía características de ambas. El año siguiente Louis de Broglie propuso que si la luz tenía ambos comportamientos, las demás partículas también lo deberían tener. Consideró las relaciones usadas antes

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$E = \hbar\omega$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck entre 2π, $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento, $\vec{k}$ el vector de onda, E la energía y ω la frecuencia angular de la onda ($=2\pi\nu$).

En 1926, Erwin Schrödinger, motivado por las ideas de De Broglie, postuló una ecuación que describiría las características ondulatorias de una partícula. Esta es llamada la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Las soluciones de esta ecuación son necesariamente complejas (a menos que no dependa del tiempo). Como sabemos, una onda sinusoidal sería la parte

real de

$$\psi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Si queremos que sea solución es necesario considerar toda la función y no solo la parte real. En este caso ψ es solución de la ecuación de Schrödinger si y solo si

$$\frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}^2 = \hbar\omega$$

es decir, si usamos las relaciones propuestas por de Broglie

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = E$$

que es la relación satisfecha para una partícula libre (sin fuerzas actuando en ella) no relativista.

Podemos notar que la ecuación de Schrödinger se consigue haciendo los reemplazos

$$p_x \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad p_y \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \qquad p_z \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \qquad E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Denotaremos a los operadores asociados con p_x, p_y, p_z y E como $\hat{p}_x$ $\hat{p}_y$ $\hat{p}_z$ y $\hat{E}$ respectivamente. En este caso

$$\hat{p}_x\psi = p_x\psi$$

$$\hat{p}_y\psi = p_y\psi$$

$$\hat{p}_z\psi = p_z\psi$$

$$\hat{E}\psi = E\psi$$

es decir, los momentos y la energía de la onda ψ son los autovalores de los operadores. Una superposición de ondas con diferentes energía y momento ya no tendría una energía y momento bien definida (pues no tendría frecuencia y longitud de onda bien definidas). Entonces, si deseamos medir una cantidad A (energía, momento, posición,...) necesitamos un operador $\hat{A}$ que la represente, y, en este caso, el valor que tomaría A en una función ϕ sería un número a tal que

$$\hat{A}\phi = a\phi$$

Si no existe tal número (es decir, si ϕ no es autovector de $\hat{A}$) entonces no tiene sentido hablar de la cantidad A para el estado ϕ.

Ya que estamos considerando nociones no relativistas le daremos un lugar privilegiado al tiempo. Pensaremos en nuestra función

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$$

como una curva de funciones parametrizadas por el tiempo t

$$\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$$

y los operadores estarían definidos en un espacio de funciones de este tipo (de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{C}$).

¿Qué sería medir la posición? Una manera de verlo es pensar en estados con posición completamente definida. La intuición nos dice que un estado en la posición (x_0, y_0, z_0) debería ser cero fuera de este punto y debería estar totalmente concentrado en él. Una «función» que logra esto es el delta de dirac $\delta_{(x_0,y_0,z_0)}$ y los operadores de los cuales ellos son autovectores serían

$$\hat{x} : \psi \mapsto x\psi \qquad \hat{y} : \psi \mapsto y\psi \qquad \hat{z} : \psi \mapsto z\psi$$

Schrödinger postuló una ecuación más general, considerando que la partícula no se encontraba libre sino que había una fuerza dada por un potencial V.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Esta ecuación la podemos obtener si en la relación de energía

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) = E$$

pensamos que V actuará como multiplicación (igual que los operadores $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$)

Schrödinger logró obtener, con esta ecuación, las energías posibles de un átomo de hidrógeno conocidas experimentalmente y predichas por un modelo básico de Bohr. Se dio cuenta de que, considerando el potencia electrostático V de un protón en reposo con un electrón, podemos hallar dichas energías como los números E tal que la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi$$

tiene solución acotada que tiende a cero en el infinito. Es decir, el operador energía (o hamiltoniano) sería

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$$

Podemos notar que todos los operadores mencionados son autoadjuntos si los consideramos definidos en un subespacio de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$ y, en realidad, al encontrar soluciones acotadas que tienden a cero en el infinito estamos encontrando (en este caso) funciones de cuadrado integrable. De la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi_t$$

vemos que el campo lineal considerado es antisimétrico (antiautoadjunto), y por lo tanto, la solución preservaría su norma

$$\int \psi^*\psi \; dV = cte$$

El problema era que Schrödinger no tenía una interpretación para la solución ψ. Ese mismo año, Born obtuvo una. Notemos primero, explícitamente, que, dado que ψ satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + V\psi^*\psi = i\hbar\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + V\psi^*\psi = -i\hbar\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*$$

La primera relación se consiguió multiplicando la ecuación de Schrödinger por ψ^* y la segunda tomando la conjugada de la ecuación y multiplicándola por ψ. Restando ambas relaciones obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)$$

y, reordenando los términos,

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = 0$$

Esto es, $\psi^*\psi$ es una densidad con densidad de corriente $\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$. Born le dio a $|\psi|^2$ la interpretación de densidad de probabilidad.

Por último, ¿cómo introducimos un campo electromagnético en la ecuación de Schrödinger? Si este es complicado que el electrostático ya mencionado tendríamos que modificar las ecuaciones de alguna manera.

Como vimos antes, el hamiltoniano asociado a una partícula en un campo electromagnético dado por el potencial $(\vec{A}, \phi)$ es

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 - q\phi$$

Utilizando las reglas dadas anteriormente obtenemos la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}-i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)^2\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{q}{\hbar}\phi\right)\psi$$

El problema que encontramos en esta ecuación es que existen infinitos $(\vec{A},\phi)$ que se relacionan con el mismo campo electromagnético. Si hacemos el cambio

$$\vec{A}\,' = \vec{A}+\vec{\nabla}\theta$$

$$\phi' = \phi+\frac{\partial}{\partial t}\theta$$

¿cómo podríamos modificar ψ de manera de que siga siendo solución?

Bastaría definir

$$\psi' = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta}\psi$$

y, con esto, podemos notar que

$$\left(\nabla-i\frac{q}{\hbar}\vec{A}'\right)\psi' = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta}\left(\nabla-i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{q}{\hbar}\phi'\right)\psi' = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{q}{\hbar}\phi\right)\psi$$

Entonces, estamos pensando en una nueva derivación

$$d-i\frac{q}{\hbar}\mathcal{A}$$

El multiplicar el campo ψ por $e^{i\frac{q}{\hbar}\theta}$ lo podemos entender como un cambio de representación. De la misma manera podríamos entender el cambio de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}+d\theta$. El primer cambio involucra la multiplicación por un elemento de un subgrupo de automorfismos lineales y es por ello que a continuación estudiaremos la idea de grupo de Lie.

Capítulo 7

Grupos de Lie

En este capítulo hablaremos un poco de grupos de Lie y de las álgebras de Lie asociadas a ellos. Empezaremos con una

Definición 7.1 (Grupo de Lie)**.** *Sean G un espacio topológico, $\mu : G \times G \to G$ una operación interna que hace de G un grupo y $\mathcal{A}$ una estructura diferenciable en G. Si μ es diferenciable según dicha estructura (considerando en $G \times G$ la estructura producto) diremos que la terna $(G, \mu, \mathcal{A})$ es un grupo de Lie.*

La primera propiedad que debemos notar es que, en un grupo de Lie G, la función $inv : G \to G$ con $inv(g) = g^{-1}$ es diferenciable. Aquí presentamos una pequeña

Demostración. Notamos que $izq_g = \mu(g, \cdot)$ es un difeomorfismo con inversa $izq_{g^{-1}}$ y, usando el teorema de la función implícita en el punto (g, g^{-1}) para cada $g \in G$, obtenemos que la aplicación inv es diferenciable. □

La idea general de grupo es el de un conjunto de biyecciones (cambio de sistema de referencia). En realidad, a todo grupo lo podemos entender como una colección de biyecciones de él mismo, por ejemplo. Si de lo que estamos hablando es de un grupo de Lie, podemos exigir aún más: lo podemos entender como un subgrupo de difeomorfismos de cierta variedad (de él mismo). En este caso podríamos escoger campos vectoriales que pertenezcan, en cierto sentido, a dicho grupo (que guarden la información de «difeomorfismos infinitesimales»).

Una propiedad interesante de los productos por la derecha es que son las únicas biyecciones en G que conmutan con los productos por la izquierda. El que los productos por la derecha conmuten con los productos por la izquierda

se debe a la asociatividad del producto. A continuación presentaremos una pequeña prueba de la recíproca. Dado $g \in G$, usaremos la notación $izq_g = \mu(g, \cdot)$ y $der_g = \mu(\cdot, g)$.

Proposición 7.1. *Sea (G, μ) un grupo. Sea $f : G \to G$ una aplicación tal que $\forall g \in G$*

$$f \circ izq_g = izq_g \circ f$$

entonces existe $h \in G$ tal que

$$f = der_h$$

Demostración. Si f fuera un der_h entonces $h = f(e)$. Hay que verificar que $f = der_{f(e)}$. Equivalentemente, hay que verificar que $\forall g \in G$

$$f(g) = izq_g(f(e))$$

y esto es cierto pues

$$f(g) = f \circ izq_g(e)$$

□

Enunciándolo de otra manera, los productos por la derecha son las únicas biyecciones que se mantienen invariantes bajo los productos por la izquierda.

Entenderemos al grupo como el conjunto de productos por la derecha e investigaremos las versiones infinitesimales. Sea, entonces, una curva diferenciable de tales difeomorfismos $f : (-\epsilon, \epsilon) \times G \to G$ que pasa por la identidad en t=0. El difeomorfismo infinitesimal asociado sería el campo $X : G \to TG$ definido por $X(g) = f(t, g)'_{t=0}$, y la propiedad de conmutación mencionada $f(t, izq_g(x)) = izq_g(f(t, x))$ para todo $(t, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times G$, se traduce en $X(izq_g(x)) = d(izq_g)_x(X(x))$. Por esta razón, nos es útil la siguiente

Definición 7.2. *Sean $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie y $X : G \to TG$ un campo diferenciable. Diremos que dicho campo es invariante a izquierda si $X \circ izq_g = d(izq_g) \circ X$ para todo $g \in G$. Al conjunto de todos los campos invariantes a izquierda lo llamaremos $\mathfrak{X}^{izq}(G)$.*

Entonces, estudiando dichos campos vectoriales esperamos obtener información acerca del grupo mismo. Nos es importante también investigar si el flujo de todo campo invariante a izquierda está formado por una curva de productos a la derecha. Para este fin consideramos la siguiente

Proposición 7.2. *Sean $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie y X un campo invariante a izquierda. El flujo ϕ de X tiene dominio $\mathbb{R} \times G$ y $\phi(t, g) = \mu(g, \phi(t, e))$ para todo $(t, g) \in \mathbb{R} \times G$*

Demostración. Primero notamos que, si α es solución de $x' = X(x)$, para cada $g \in G$ entonces $t \mapsto \mu(g, \alpha(t))$ también es solución. Esto se sigue de que el campo X es invariante a izquierda.

Ahora, sea $\gamma : (-2\epsilon, 2\epsilon) \to G$ tal que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ para todo $t \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ y $\gamma(0) = e$. Definamos $\gamma_1 : (-\epsilon, 3\epsilon) \to G$ y $\gamma_2 : (-3\epsilon, \epsilon) \to G$ de la siguiente manera

$$\gamma_1(t) = izq_{\gamma(\epsilon)}(\gamma(t - \epsilon)), \text{ si } t \in (-\epsilon, 3\epsilon)$$

y

$$\gamma_2(t) = izq_{\gamma(-\epsilon)}(\gamma(t + \epsilon)), \text{ si } t \in (-3\epsilon, \epsilon)$$

Notamos que γ y γ_1 son soluciones de $x' = X(x)$ que coinciden en $t = \epsilon$ y γ y γ_2 son soluciones de $x' = X(x)$ que coinciden en $t = -\epsilon$. Por lo tanto γ_1 y γ_2 coinciden en $(-\epsilon, \epsilon)$ y definimos $\tilde{\gamma} : (-3\epsilon, 3\epsilon) \to G$ como una extensión de ambas. Se sigue de esto que el intervalo maximal donde existe solución de $x' = X(x)$ con $x(0) = e$ es $\mathbb{R}$ y, usando la primera observación, se siguen las propiedades enunciadas. □

Notamos, primero, que cualquiera de estos campos está determinado por su valor en algún punto de G y viceversa, es decir, dado un vector tangente a G existe un campo invariante a izquierda que lo extiende. Por lo tanto, para estudiar a los campos invariantes a izquierda podemos estudiar algún espacio tangente. Escogemos T_eG y lo nombramos $\mathfrak{g}$. Entonces, tenemos la siguiente

Proposición 7.3. *Sea $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie. La aplicación $f : G \times \mathfrak{g} \to TG$ que envía (g, V) en $d(izq_g)_e V$ es un difeomorfismo. La aplicación $\tilde{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$ inducida por f mediante $\tilde{f}(V)(g) = f(g, V)$ es un monomorfismo de espacios vectoriales con imagen $\mathfrak{X}^{izq}(G)$.*

Demostración. Para esta prueba escribiremos simplemente las aplicaciones pertinentes como composición de aplicaciones diferenciables logrando obtener su diferenciabilidad.

Identifiquemos $T(G \times G)$ con $TG \times TG$ de la manera canónica. Luego, notemos que $f = d\mu \circ inc$ con $inc : G \times \mathfrak{g} \to TG \times TG$ definida por $inc(g, V) = ((g, 0), (e, V))$. De esto se sigue que f es diferenciable. Para demostrar que es difeomorfismo notemos que su inversa es $f^{-1} : TG \to G \times \mathfrak{g}$ que envía (g, V) en $(g, d(izq_{g^{-1}})_g V)$. Su primera coordenada es la proyección $\pi : TG \to G$ y la segunda es $d\mu \circ (\pi_2, id_{TG})$ donde $\pi_2 = 0 \circ inv \circ \pi$ con 0 la sección 0 de TG.

Para la afirmación hecha sobre $\tilde{f}$ podemos notar primero la buena definición: $\tilde{f}(V)$ es diferenciable pues lo podemos ver como $d\mu \circ (0,(e,V))$ donde 0, otra vez, es la sección 0 de TG. Podemos ver que la imagen de $\tilde{f}$ está incluida en $\mathfrak{X}^{izq}(G)$ si notamos que $d(izq_h)_g \circ d(izq_g)_e = d(izq_{\mu(h,g)})_e$ y el hecho de que es exactamente $\mathfrak{X}^{izq}(G)$ y es inyectiva se sigue de que un elemento de aquí está caracterizado por su valor en e. Por último, la linealidad de $\tilde{f}$ se sigue de la linealidad de $d(izq_g)_e$. □

Una observación importante es que, para estudiar al grupo, en lugar de considerar campos invariantes a izquierda podríamos considerar campos invariantes a derecha. Entonces, dado $g \in G$ tenemos dos posibles identificaciones de $\mathfrak{g}$ con T_gG:

$$d(izq_g)_e : \mathfrak{g} \to T_gG$$

y

$$d(der_g)_e : \mathfrak{g} \to T_gG$$

Lo que podemos notar es que el cambio entre las maneras de representar T_gG está dado por $d(izq_g)_e^{-1} \circ d(der_g)_e = d(izq_{g^{-1}} \circ der_g)_e$, o, llamando $Ad_g : G \to G$ al homomorfismo que lleva $x \mapsto gxg^{-1}$, el cambio sería $d(Ad_{g^{-1}})_e$.

Con el objetivo de estudiar los campos invariantes a izquierda con ayuda del espacio tangente a la identidad consideramos la siguiente

Proposición 7.4. *Sea $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie y $\gamma : \mathbb{R} \to G$ diferenciable en $0 \in \mathbb{R}$. Se cumple que γ es un homomorfismo de grupos si y solo si existe X, campo invariante a izquierda, con γ solución de $x' = X(x)$ y $x(0) = e$*

Demostración. Si γ es un homomorfismo de grupos, entonces para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ tenemos que γ es continua en $t = t_0$ pues $\gamma = izq_{\gamma(t_0)} \circ \gamma \circ Tr_{-t_0}$ (donde $Tr_{-t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definido por $Tr_{-t_0}(x) = x - t_0$)), con lo que, además, es diferenciable. Tomemos $\gamma'(0)$ y extendámoslo a un campo invariante a izquierda X. Notamos, entonces, que, por la relación anterior, $\gamma'(t_0) = d(izq_{\gamma(t_0)})\gamma'(0)$. Por lo tanto, tenemos que γ es solución de $x' = X(x)$.

Si γ es solución de $x' = X(x)$ con $X(0) = e$, notamos que, como X es invariante a izquierda, $t \mapsto izq_{\gamma(s)}(\gamma(t))$ es solución también y en $t = 0$ vale $\gamma(s)$. Como $t \mapsto \gamma(s+t)$ también es solución y en $t = 0$ vale $\gamma(s)$ tenemos que $izq_{\gamma(s)}(\gamma(t)) = \gamma(s+t)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, γ es un homomorfismo de grupos. □

Esto quiere decir que ya tenemos clasificados todos los homomorfismos diferenciables de $\mathbb{R}$ en G.

Definición 7.3 (Exponencial)**.** *Sea $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie. Definimos la aplicación $exp : \mathfrak{g} \to G$ de la siguiente manera: dado $X \in \mathfrak{g}$, tomamos $\gamma : \mathbb{R} \to G$ el único homomorfismo diferenciable con $\gamma'(0) = X$ y definimos $exp(X) = \gamma(1)$.*

Notamos entonces que la aplicación exponencial es diferenciable: consideramos la ecuación diferencial en TG dada por el campo $Z : TG \to T(TG)$ con $Z(p, X) = ((p, X), (X, 0))$ donde estamos usando la identificación de TG con $G \times \mathfrak{g}$ que induce una identificación de $T(TG)$ con $TG \times T\mathfrak{g}$.

En $\mathfrak{g}$ podemos colocar una estructura de álgebra de Lie que guardará la información local del producto en el grupo de Lie.

Proposición 7.5. *Sea $(G, \mu, \mathcal{A})$ un grupo de Lie y sean X y Y dos campos invariantes a izquierda. Entonces el campo $[X, Y]$ es también invariante a izquierda*

Demostración. Basta recordar que, si $f : G \to G$ es un difeomorfismo

$$[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$$

□

La relación entre composición de flujos de campos vectoriales y el bracket de Lie de los campos vectoriales indica que el bracket debería guardar información del producto. Entonces, inducimos dicho bracket en $\mathfrak{g}$ y llamamos a aquello el álgebra de Lie del grupo G.

Al igual que podemos hablar de los generadores de un grupo de Lie (su álgebra de Lie), podemos hablar de los generadores de una acción de un grupo de Lie sobre una variedad. Esta afirmación la colocamos en la siguiente

Proposición 7.6 (Álgebra de Lie de la acción)**.** *Sean M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie y $a : M \times G \to M$ una acción por la derecha diferenciable de G en M. Dado $X \in \mathfrak{g}$, consideramos el campo $\tilde{X} : M \to TM$ que a cada $p \in M$ le asigna $a(p, exp(tX))'(t = 0)$. La aplicación $f : M \times \mathfrak{g} \to TM$ definida por $f(p, X) = \tilde{X}(p)$ es diferenciable y, además, se cumple que $\tilde{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ definida por $\tilde{f}(X) = \tilde{X}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie (considerando el álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$ inducido por los campos invariantes a izquierda).*

Demostración. Identifiquemos $T(M \times G)$ con $T(M) \times T(G)$ de la manera canónica. Luego, notemos que la aplicación f, definida antes es $inc : M \times \mathfrak{g} \to$

$T(M) \times T(G)$ definida por $inc(p, X) = ((p, 0), (e, X))$, compuesta con el diferencial de a, $da : T(M) \times T(G) \to T(M)$, esto es, $f = da \circ inc$. Con esto tenemos la diferenciabilidad de f y de los campos $\tilde{X}$.

Ahora pasemos a verificar que $\tilde{f}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es, $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X, Y}]$. Notemos que el flujo de $\tilde{X}$ es $(p, t) \mapsto a(p, exp(tX))$ por lo que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](q) = \mathfrak{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}(q) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$$

donde $\gamma(t) = (d(a(\,\cdot\,, exp(-tX)))_{a(q,exp(tX))} \tilde{Y}(a(q, exp(tX))))$ y, como $\tilde{Y}(q) = (a(q, exp(sY)))'(0)$, tenemos que

$$\gamma(t) = a(\ a(\ a(q, exp(tX)), exp(sY)\ ), exp(-tX)\ )'(0)$$

que es igual a, por ser a una acción,

$$a(q, exp(tX)exp(sY)exp(-tX))'(s = 0)$$

con lo que tenemos $\gamma(t) = d(a(q,\ \cdot\ ))_e(exp(tX)Yexp(-tX))$. Entonces,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](q) = d(a(q,\ \cdot\ ))_e \frac{d(exp(tX)Yexp(-tX))}{dt}(0) = d(a(q,\ \cdot\ ))_e[X, Y]$$

□

Capítulo 8

Fibrados principales

Ahora vamos a entender mejor la idea de cambio de representaciones de los campos mencionada en el capítulo Mecánica Cuántica. Para que existan cambios de representaciones, debe existir un objeto «abstracto» al que haya que representar. Recordemos que el cambio dependía del punto en el espaciotiempo, esto indica que para cada uno de tales puntos debemos considerar un espacio vectorial (es decir, los posibles valores del campo).

8.1. Fibrados

Podemos formular una definición general de lo anterior

Definición 8.1 (Fibrado)**.** *Sean E, F y B variedades diferenciables y $\pi : E \to B$ una aplicación diferenciable y sobreyectiva. Si para cada $p \in B$ existen: U vecindad de p y $\phi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ difeomorfismo tal que $\pi \circ \phi = \pi_1$ (aquí π_1 es la proyección de $U \times F$ en U), entonces diremos que la 4-upla (E, F, B, π) es un fibrado de E sobre B con fibra F. A un ϕ que cumpla la propiedad anterior lo llamaremos trivialización local.*

Ya con esta definición podemos entender lo que sería un «campo» en este fibrado a lo que comunmente se llama «sección» (ver figura 8.1)

Definición 8.2 (Sección)**.** *Sea (E, F, B, π) un fibrado. Una aplicación diferenciable $\sigma : B \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_B$ será llamada sección del fibrado.*

Lo que buscamos es, entonces, un fibrado, donde F es un espacio vectorial y cada sección es lo que llamábamos función de onda. El primer inconveniente es que, a pesar de que F sea un espacio vectorial, no tenemos noción

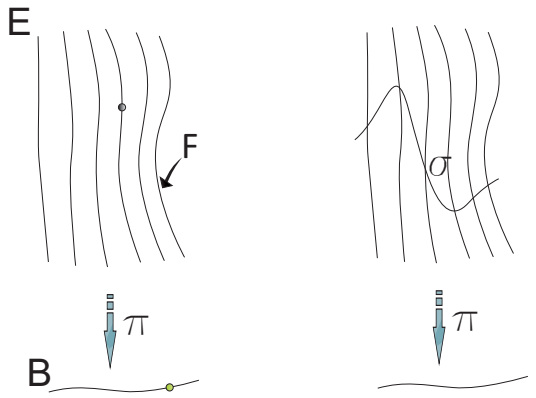

Figura 8.1: A la izquierda: Los ingredientes de un fibrado.
A la derecha: Una sección σ de un fibrado

de cómo sumar vectores en una misma fibra (ello nos diría cómo sumar secciones). Una manera directa de sumar vectores en una fibra sería usando trivializaciones locales. Sin embargo, conseguiríamos diferentes formas de sumar vectores (dependiendo de la trivialización local que elijamos) a menos que... a menos que en realidad sean la misma forma, en otras palabras, a menos que la identidad sea un isomorfismo entre las dos estructuras asignadas, o, de manera equivalente, a menos que el cambio de trivializaciones sea un isomorfismo. Esto motiva la siguiente idea:

Si tenemos una acción por la izquierda diferenciable $a : G \times F \to F$ del grupo de Lie G en la fibra F podemos exigir que los cambios de trivializaciones sean G actuando en las fibras. Esto lo capturamos en la siguiente

Definición 8.3 (G-fibrado)**.** *Sean E, F y B variedades diferenciables, G un grupo de Lie, $a : G \times F \to F$ una acción por la izquierda diferenciable de G en F y $\pi : E \to B$ una función diferenciable sobreyectiva. Si existe una cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ abierta de B, una familia de difeomorfismos $\{\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de manera que $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$ y una familia diferenciable $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}$ tal que para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$, para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y para todo $f \in F$ se cumple que $\phi_\beta^{-1}(\phi_\alpha(p, f)) = (p, a(g_{\alpha\beta}(p), f))$ diremos que $(E, F, B, G, a, \pi, \{U_\alpha, \phi_\alpha\})$ es un G-fibrado de E sobre B con fibra F.*

De esta manera completamos nuestra definición de fibrado vectorial.

Definición 8.4. *Sea V un espacio vectorial. Si consideramos el grupo $GL(V)$ actuando en V de la manera canónica, un $GL(V)$-fibrado con fibra V será llamado fibrado vectorial.*

Ahora, ya con un fibrado vectorial, lo que necesitamos es derivar secciones.

8.2. Conexiones y fibrado principal

Consideremos, entonces, un fibrado vectorial E, una sección s, un punto $p \in B$, y una dirección $v \in T_pB$. La noción usual de derivar es considerar

$$\lim_{t\to 0} \frac{s(p+tv) - s(p)}{t}$$

El primer inconveniente es que no tenemos idea de línea recta $p + tv$ en una variedad. Pero eso no es realmente un problema (¿verdad?) pues la noción usual de derivar se puede transformar en

$$\lim_{t\to 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(p)}{t}$$

donde γ es una curva diferenciable que en $t = 0$ pasa por p a velocidad v. Esto tiene sentido pues en variedades ya sabemos derivar curvas (es una manera de definir vectores tangentes).

El siguiente inconveniente es que no tiene sentido hacer la resta $s(\gamma(t)) - s(p)$ pues se encuentran en diferentes fibras. Ahí entra el concepto de identificación de fibras.

Basta poder identificar fibras a lo largo de curvas. En este caso, para cada t necesitamos un isomorfismo

$$I_t : V \to E_{\gamma(t)}$$

y el límite a considerar sería

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_0 \circ I_t^{-1}(s(\gamma(t))) - s(p)}{t}$$

Si observamos este procedimiento en trivalizaciones locales lo que tenemos es que γ se ve como una curva en V, llamémosla $\xi(t)$, y las identificaciones las veríamos como una curva en $GL(V)$, denotada por g_t. Así la curva $I_0 \circ I_t^{-1}(s(\gamma(t)))$ se vería como

$$g_0\, g_t^{-1} \xi(t)$$

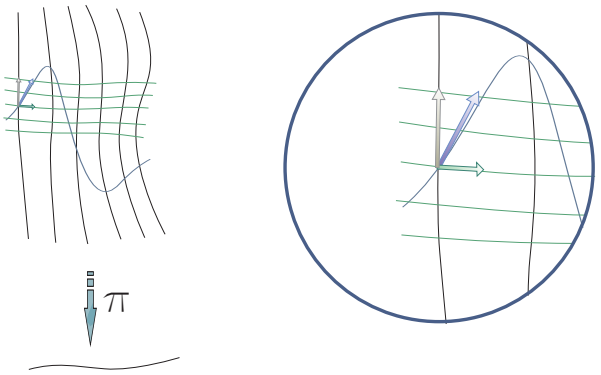

Figura 8.2: Descomposición de la derivada usual en la derivada nueva y la derivada de la curva constante

Si derivamos dicha curva obtenemos

$$\frac{d(g_0\, g_t^{-1}\xi(t))}{dt} = -\frac{dg_t}{dt} g_0^{-1}\xi(0) + \frac{d\xi}{dt}$$

Al interpretar este resultado, vemos que la derivada usual $d\xi/dt$ se puede descomponer como la derivada nueva más la derivada usual de la curva $g_t g_0^{-1}\xi(0)$ (que tendría derivada nueva cero) (ver figura 8.2).

Además, obtenemos una gran similitud con el caso en mecánica cuántica, donde teníamos, por ejemplo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{q}{\hbar}\phi\right)\psi$$

Ello indica que $-(dg/dt)\, g_0^{-1}$ debe representar (salvo constantes) el potencial electromagnético.

Vemos, ahora, que es conveniente considerar un fibrado hecho de estos g donde la curva $g(t)$ es considerada una curva «constante».

Dada una curva «constante» $g(t)$ y un vector $v \in V$ sería conveniente poder considerar $g(t)v \in E$ que sería una curva «constante» en E. El potencial electromagnético $-(dg/dt)\, g_0^{-1}$ debería estar asociado a este nuevo fibrado.

Este nuevo fibrado de fibra el grupo G será denotado por P a lo largo de todo el capítulo. Si deseamos «aplicar» un elemento $g \in P$ en un vector $v \in V$

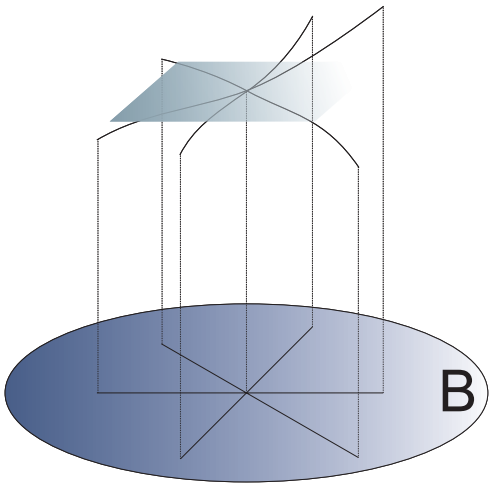

Figura 8.3: Las líneas rectas sobre B generan curvas «constantes» en P las cuales generan un espacio vectorial

lo más natural sería, en primer lugar, que las trivializaciones de P estén indexadas por el mismo conjunto de índices que las trivializaciones de E. Luego, gv en la trivialización indexada por α debe ser g en la trivialización α aplicado en v. Si consideramos dos trivializaciones α y β, $g_{\beta\alpha}(gv)^\alpha = (gv)^\beta$, para todo $v \in V$, esto es, $g_{\beta\alpha}g^\alpha = g^\beta$. Esto motiva a la siguiente

Definición 8.5. *Sea G un grupo de Lie. Los G-fibrados con fibra G y acción «multiplicar por la izquierda» serán llamados G-fibrados principales.*

Ahora queremos definir curvas «constantes» en un fibrado principal. Para ello notemos que la información de cuáles son las curvas «constantes» es, en realidad, infinitesimal. Si consideramos un punto g en P y pensamos en las curvas constantes que pasan por g obtendremos un espacio vectorial. Este hecho es debido a la diferenciabilidad del sistema de identificaciones y es necesario para que la derivada esté bien definida.

Ello quiere decir que necesitaremos considerar un subespacio vectorial del espacio tangente en cada punto $g \in P$. Ya que deseamos que ello nos defina una identificación en el fibrado E es importante notar que si $g(t)$ es una curva constante en P y $h \in G$, $g(t)\,h$ es también una curva constante (al menos en coordenadas locales). Esto es debido a que la curva I_t no es

realmente necesaria, podemos considerar $I_t \circ T$ con T un automorfismo de V.

Es así que sería más sencillo que G actúe en P por la derecha. Para ello recordamos que la acción multiplicar por la derecha conmuta con la acción multiplicar por la izquierda. Como el cambio de trivializaciones está hecho de estos «multiplicar por la izquierda» debería estar bien definida el producto a derecha.

Proposición 8.1 (Acción inducida por la derecha)**.**
Sean $(E, F, B, G, a, \pi, \{U_\alpha, \phi_\alpha\})$ un G-fibrado de E sobre B con fibra F, H un grupo de Lie y $b : F \times H \to F$ una acción por la derecha diferenciable de H en F. Existe una única acción $B : E \times H \to E$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ se cumple que ϕ_α es un isomorfismo entre la acción B restricta a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ y la acción natural inducida en $U_\alpha \times F$ (es decir, la acción $id_{U_\alpha} \times b$).

Demostración. Definamos la acción como debe ser: $B|_{\pi^{-1}(U_\alpha)\times H} = \phi_\alpha \circ (id_{U_\alpha} \times b) \circ (\phi_\alpha^{-1} \times id_H)$. Es decir, si queremos ver como actúa $h \in H$ en $x \in E$, tomamos $\alpha \in \Lambda$ tal que $\pi(x) \in U_\alpha$ y vemos a x por medio de estas coordenadas como $(\pi(x), f)$ (esto es, $\phi_\alpha(\pi(x), f) = x$), luego hacemos que h actúe en f obteniendo $b(f, h)$ y regresamos a E. Con esto obtenemos que la acción de h en x es $\phi_\alpha(b(f, h))$.

Lo que nos falta ver, entonces, es que esta acción está bien definida: $\phi_\alpha(p, f_1) = \phi_\beta(p, f_2)$ implica que $\phi_\alpha(p, b(f_1, h)) = \phi_\beta(p, b(f_2, h))$. Para esto recordemos que, por definición, existe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ tal que para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $f_1, f_2 \in F$ se cumple $f_2 = a(g_{\alpha\beta}(p), f_1)$ si y solo si $\phi_\alpha(p, f_1) = \phi_\beta(p, f_2)$. Notamos entonces que $f_2 = a(g_{\alpha\beta}(p), f_1)$ implica $b(f_2, h) = b(a(g_{\alpha\beta}(p), f_1), h) = a(g_{\alpha\beta}(p), b(f_1, h))$ y, por lo tanto, $\phi_\alpha(p, b(f_1, h)) = \phi_\beta(p, b(f_2, h))$. □

Por lo visto en la sección de grupos de Lie, tenemos entonces un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(P)$ que genera la acción por la derecha. Llamaremos $T^v P$ al subfibrado de TP asociado. Él esta conformado, simplemente, por los espacios tangentes a las fibras.

Algo interesante a considerar es que, en un fibrado principal, una trivialización está determinada por una sección local. Al considerar una trivialización obtenemos una sección, por ejemplo, la sección identidad. Recíprocamente, si pensamos en una sección $\sigma : U \to P$ podemos considerar la trivialización dada por

$$\phi : U \times G \to P$$

$$(x, g) \mapsto \sigma(x)\, g$$

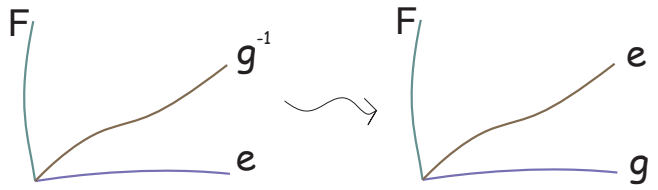

Figura 8.4: A la izquierda: La sección g^{-1} en la trivialización dada por e. A la derecha: Notamos que g^{-1} es también la sección «identidad» vista desde la sección «constante» g

que es compatible con el sistema de trivializaciones.

Es fácil ver que esta define un difeomorfismo (podemos ver que su derivada es invertible, por ejemplo). Mas lo interesante es que este hecho nos permite tratar de una manera más sencilla a las trivializaciones locales.

Siguiendo con la idea de definir las curvas «constantes» de manera infinitesimal proponemos la siguiente

Definición 8.6. *Sea E un fibrado vectorial sobre B y F un subfibrado. Decimos que G es un fibrado complementario si, $\forall p \in B : G_p \oplus F_p = E_p$.*

Y la información de las curvas «constantes» estaría atrapada en uno de tales objetos.

Definición 8.7. *Sea E un G-fibrado principal. Un subfibrado T^hE de TE se dice una conexión si es complementario a T^vE y es invariante por la acción por la derecha, es decir, $T^h_pE = T^h_{gp}E$.*

Ahora nos preguntamos dónde aparece el potencial electromagnético. Recordemos que este tenía que ver con $-(dg/dt)\, g_0^{-1}$. Para simplificar asumimos $g_0 = e$. Tenemos el opuesto a la derivada de g, es decir, la derivada de la sección g^{-1} en la trivialización $e(t) = e$ escogida. Esta sería opuesta a la derivada de e en la trivialización dada por g. Ello nos indica que obtenemos $-(dg/dt)\, g_0^{-1}$ considerando la sección «identidad» y proyectando su derivada con respecto a la descomposición $T_gE = T^h_gE \oplus T^v_gE$ para luego identificar T^v_gE con $\mathfrak{g}$.

De una manera más explícita, el subfibrado T^hE define un morfismo de fibrados $\pi : TE \to T^vE$ tal que para cada $p \in E$, π_p es la proyección de T_pE en T^v_pE definida por la descomposición $T_pE = T^v_pE \oplus T^h_pE$. Este morfismo π es invariante por la acción por la derecha en E.

De la misma forma, un morfismo sobreyectivo $\pi : TE \to T^vE$ invariante por la acción tal que es punto a punto una proyección (es decir, $\pi \circ i \circ \pi = \pi$, con $i : T^vE \to TE$ la inclusión), define una conexión $T^hE = Ker(\pi)$.

Para más simplificación podemos considerar el isomorfismo $f : E \times \mathfrak{g} \to T^vE$ con lo que tenemos que la proyección π está caracterizada por $\tilde{\pi} = (f^{-1} \circ \pi)_2$ y la invarianza por la acción se convierte en $\tilde{\pi}_p \circ d(der_g)_p^{-1} = Ad_{g^{-1}} \circ \tilde{\pi}_{pg}$. La adjunta viene de que la identificación de T^vE_p con $\mathfrak{g}$ se hizo pensando en la acción por la derecha, lo que hizo que sea 'invariante a izquierda'. Con esta caracterización hacemos la siguiente

Definición 8.8. *Sea E un fibrado principal. Un morfismo $\tilde{\pi} : TE \to \mathfrak{g}$ se dice una conexión si restricto a T^vE es la segunda componente del isomorfismo anterior f^{-1} y $\tilde{\pi}_p \circ d(der_g)_p^{-1} = Ad_{g^{-1}} \circ \tilde{\pi}_{pg}$.*

Sea $X \in \mathfrak{g}$. Si llamamos $f_p(X)$ a X visto en T_pE, entonces $f_p(X) = (p \cdot exp(tX))'(0)$. Si consideramos la aplicación $x \mapsto x \cdot g$, notamos cómo varía $f_p(X)$: $f_p(X) \mapsto (p \cdot exp(tX) \cdot g)'(0)$. Queremos ver que relación tiene con $f_{pg}(X)$ por lo que buscamos un $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $exp(tX) \cdot g = g \cdot exp(tY)$ con lo que tenemos $g^{-1} \cdot exp(tX) \cdot g = exp(tY)$ y, por lo tanto, $Ad_{g^{-1}}X = Y$.

Como vimos antes, en un fibrado principal, una trivialización local está completamente determinada por una sección local. Si tenemos una conexión ω (en el estilo 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada), ella está completamente determinada por su pullback por secciones locales. Es decir, dada una sección local $\sigma : U \subset M \to P$, consideramos la forma $\mathfrak{g}$-valuada $\sigma^*\omega$. Si conocemos σ y $\sigma^*\omega$ podemos obtener ω por la invarianza a derecha de la distribución: $\omega_{\sigma(x)g}((d\sigma \cdot v)g) = g^{-1}(\sigma^*\omega)_x(v)g$ y vale lo conocido en el espacio vertical.

Es así que nuestro potencial electromagnético será una conexión en un $U(1)$-fibrado principal, y lo que veíamos antes sería esta conexión vista en una trivialización local.

Un sistema de curvas «constantes» en un fibrado vectorial motivaron nuestra definición de fibrado principal. ¿Cómo construir un fibrado vectorial partiendo de un fibrado principal?

Proposición 8.2. *Sea P un fibrado principal sobre B con fibra G y sistema de trivializaciones $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Sea $\rho : G \times F \to F$ una acción diferenciable de G en F. Existe un G-fibrado E sobre B con fibra F y sistema de trivializaciones $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de manera que los $g_{\alpha\beta}$ sean los mismos.*

Demostración. Podemos construir E de la manera más directa.

Llamemos $\mathcal{E}$ a la unión disjunta de las variedades $\{U_\alpha \times F\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Consideremos la relación de equivalencia $(x, f)_\beta \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)f)_\alpha$.

El espacio E será el espacio $\mathcal{E}$ partido por $\sim$.

La proyección $\pi : \mathcal{E} \to B$ es la natural.

Las trivializaciones serían $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ esencialmente la identidad.

¿La aplicación ϕ_α es un homeomorfismo?

Es continua pues es la restricción de la aplicación cociente.

Es una aplicación abierta pues si consideramos el abierto $A\times D \subset U_\beta \times F$ su preimagen por π es unión de

$$[id_{A\cap U_{\alpha\beta}} \times \rho] \circ [(id_{A\cap U_{\alpha\beta}}, g_{\alpha\beta}) \times id_D](A \cap U_{\alpha\beta}) \times D$$

Como los cambios $\phi_{\alpha\beta}$ son difeomorfismos, las trivializaciones determinan una estructura diferenciable en E.

a) Es Hausdorff:

   En realidad se cumple algo más general: Si B y F son Hausdorff, cualquier fibrado (topológico) sobre B con fibra F es Hausdorff.

b) Es segundo contable:

   Otra vez, en realidad se cumple algo más general: Si B y F son segundo contables, un fibrado E con sobre B con fibra F lo es.

   Consideremos una base contable A_λ de B hecha por abiertos con trivializaciones $\phi_\lambda : A_\lambda \times F \to \pi^{-1}(A_\lambda)$. Si tomamos una base contable D_η de F, podemos considerar la familia

   $$\phi_\lambda((A_\delta \cap A_\lambda) \times D_\eta)$$

   que sería una base contable de E.

   Explícitamente, consideremos un abierto $X \subset E$ y un punto $x \in X$. Buscamos un par (λ, η) tal que $\phi_\lambda(A_\lambda \times D_\eta) \subset X$. Primero podemos encontrar un β tal que $\pi(x) \in A_\beta$. Así, el abierto $(\pi^{-1}(A_\lambda)) \cap X$ es homemorfo a un abierto de $A_\lambda \times F$. El punto correspondiente a x sería un punto interior de $A_\lambda \times F$ por lo que existirá un δ y un η tal que $(A_\delta \cap A_\lambda) \times D_\eta$ lo contiene.

□

En realidad, los $g_{\alpha\beta}$ determinan completamente la estructura de fibrado de acuerdo a la siguiente noción de isomorfismo de fibrados. Primero recordemos que en un G-fibrado tenemos definida la aplicación

$$\tilde{a} : P \times V \to E$$

Esta aplicación determina la G-estructura. Dada una sección $\sigma : U \to P$ podemos considerar la trivialización

$$\phi : U \times V \to E$$

$$(x, v) \to \tilde{a}(\sigma(x), v)$$

Estas trivializaciones determinan, claramente, la G-estructura.

Definición 8.9. *Sean E_1 y E_2 G-fibrados con fibra F. Un difeomorfismo $f : E_1 \to E_2$ será llamado isomorfismo de fibrados si*

$$\pi_2 \circ f = \pi_1$$

$$f \circ \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$$

De esta manera, fibrados con el mismo sistema de $g_{\alpha\beta}$ son isomorfos. Este isomorfismo puede ser construido directamente utilizando trivializaciones locales.

Si consideramos un espacio vectorial V y una acción lineal ρ del grupo G sobre V entonces obtenemos un fibrado vectorial asociado a la representación ρ.

Ahora, si consideramos en P una conexión, ¿cómo obtenemos la derivación en E?

Consideremos una sección S de E y una curva $\gamma : [0, T] \to B$. Para derivar S en la dirección de $\gamma'(0)$ (en el punto $\gamma(0)$) consideramos el sistema de identificaciones que vive en P. Es decir, necesitamos la siguiente

Proposición 8.3. *Sea una curva cerrada γ en la base del fibrado. Existe alguna curva horizontal que se proyecte en γ.*

Demostración. Consideremos $\tilde{\gamma}$ un levantamiento cualquiera de γ (esto se puede hacer en cualquier fibrado).

Perturbemos γ para hacerla horizontal. Es decir, consideremos γg con g una curva en G. El que esta curva sea horizontal significa que

$$\omega\left(\frac{d(\tilde{\gamma}(t)g_t)}{dt}\right)$$

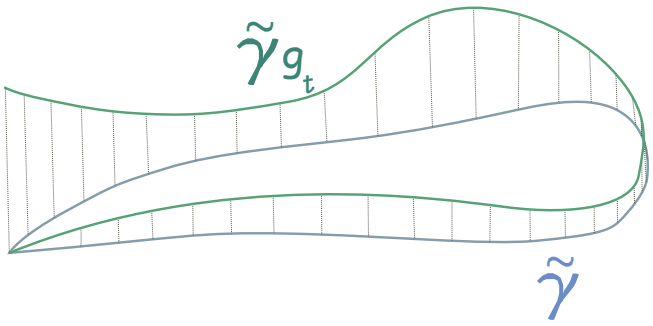

Figura 8.5: Una curva cerrada es perturbada por g_t para convertirse en una «constante».

$$= \omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}g_t + \tilde{\gamma}(t)\frac{dg_t}{dt}\right)$$
$$= g_t^{-1}\omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}\right)g_t + g_t^{-1}\frac{dg_t}{dt}$$
$$= 0$$

Es decir, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dg_t}{dt} = -\omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}\right)g_t$$

Tomamos cualquier solución g y consideramos la nueva curva $\alpha(t) = \tilde{\gamma}(t)g(t)$ □

Es más, por unicidad en la solución obtenemos que, si elegimos el punto inicial, la curva es única (antes tenemos que notar que dos curvas diferenciables $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ sobre γ generan un g tal que $\gamma_1 = \gamma_2 g$, esta curva g lo conseguimos en trivializaciones dividiendo una por la otra).

Hemos usado un hecho (tal vez sencillo de ver) sin demostrar. Verifiquémoslo.

Proposición 8.4. *Sea E un fibrado sobre B con fibra F y una curva $\gamma : [a,b] \to B$.*

Existe una curva $\tilde{\gamma} : [a,b] \to E$ tal que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

Demostración. Consideremos $\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ tal que para cada $k \in \{1,...,n\}$ exista una trivialización $\phi_k : U_k \times F \to \pi^{-1}(U_k)$ con $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$.

Fijemos $p \in E$ tal que $\pi(p) = \gamma(a)$. Definamos $\tilde{\gamma}$ por tramos.

Primero definamos $\gamma(t_0) = p$

Luego, ya definido hasta t_{k-1} definimos, para $t \in [t_{k-1}, t_k]$ $\tilde{\gamma}(t) = \phi_1(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t_{k-1}))$

Así obtenemos la curva deseada $\tilde{\gamma}$ que resulta ser continua.

Si estamos en el contexto diferenciable tendremos que modificar un poco dicha curva.

Ella ya es diferenciable en $[a, b] - \tau$. Consideremos $\epsilon < \|\tau\|/3$ tal que $\gamma([t_k - \epsilon, t_k + \epsilon])$ está dentro de una trivialización.

Para cada $k \in \tau - \{a, b\}$ consideremos una aplicación

$$f_k : [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon] \to [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon]$$

tal que

$$\forall t \in \left[t_k - \epsilon,\, t_k - \frac{2}{3}\epsilon\right] : f(t) = t$$

$$\forall t \in \left[t_k - \frac{2}{3}\epsilon,\, t_k - \frac{1}{3}\epsilon\right] : f(t) \leq t_k$$

$$\forall t \in \left[t_k - \frac{1}{3}\epsilon,\, t_k + \frac{1}{3}\epsilon\right] : f(t) = t_k$$

$$\forall t \in \left[t_k + \frac{1}{3}\epsilon,\, t_k - \frac{2}{3}\epsilon\right] : f(t) \geq t_k$$

$$\forall t \in \left[t_k + \frac{2}{3}\epsilon,\, t_k + \epsilon,\right] : f(t) = t$$

Luego solo basta redefinir la componente en F de $\tilde{\gamma}$ componiéndola por f_k donde tenga sentido y dejarlo como antes donde no sea posible.

Para construir tal f_k basta construir uno análogo considerando $t_k = 0$. Tomemos $\alpha : \mathbb{R} \to [0, 1]$ diferenciable tal que

$$\alpha|_{[-1/2,1/2]} = 0$$

$$\alpha|_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)} = 1$$

y consideremos la aplicación $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x(t) = t$.

Entonces la aplicación buscada es una modificación de $x \cdot \alpha$

□

Ya tenemos que existen las curvas «constantes» en P. Ahora quisieramos definir la derivación en E. Consideremos la sección S en E y la curva $\gamma : [0, T] \to B$. Consideremos g una curva «constante» en P que se proyecta en γ

Así, obtenemos una curva diferenciable $\hat{\gamma} : [0, T] \to V$ tal que

$$g_t \hat{\gamma}(t) = S(\gamma(t))$$

La derivada buscada sería

$$g_0 \frac{d}{dt} \gamma(t)|_{t=0}$$

Una manera más directa de ver esto es recordar la naturaleza de la 1-forma conexión.

Recordemos que en una trivialización, la forma conexión ω se ve como una 1-forma con valores en $\mathfrak{g}$.

La derivada de la sección S en una trivialización local en la dirección $u \in T_x B$ es

$$DS \cdot u = dS \cdot u + \omega(u) S$$

donde la acción de $\mathfrak{g}$ en V es la inducida por la acción de G en V (es decir, la derivada en la identidad).

Entonces, hemos conseguido una aplicación

$$D : \Omega_B^0(E) \to \Omega_B^1(E)$$

donde $\Omega_B^0(E)$ es el espacio de secciones diferenciables de E y $\Omega_B^1(E)$ son secciones del fibrado de 1-formas con valores en E, es decir, sobre cada punto $x \in B$ consideramos las aplicaciones lineales de $T_x B$ en $E_x = \pi^{-1}(x)$.

Más explícitamente, tenemos la siguiente

Definición 8.10. *Sea E_1 un G_1-fibrado vectorial de fibra V_1 y sistema de cambio de trivializaciones $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G_1$, y E_2 un G_2-fibrado vectorial de fibra V_2 con sistema $h_{\eta\nu} : \bar{U}_{\eta\nu} \to G_2$, ambos sobre B.*

Definimos el fibrado $E_1 \otimes E_2$ como aquel con sistema de cambio de trivializaciones

$$(g_{\alpha\beta}, h_{\eta\nu}) : U_{\alpha\beta} \cap \bar{U}_{\eta\nu} \to G_1 \times G_2$$

$$x \to (g_{\alpha\beta}(x), h_{\eta\nu}(x))$$

donde $G_1 \times G_2$ actúa en $V_1 \otimes V_2$ como

$$\hat{a} : G_1 \otimes G_2 \to GL(V_1) \times GL(V_2) \subset GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$(g, h) \to a_1(g) \otimes a_2(h)$$

Ya con esto, para definir el fibrado de 1-formas con valores en E podemos notar que es el fibrado con fibra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, V)$ y acción de $GL(\mathbb{R}^n) \times G$.

Por último, falta establecer qué sería el campo electromagnético.

8.3. Curvatura y campo electromagnético

Ya sabemos que el campo electromagnético es la derivada exterior de la 1-forma $\mathcal{A}$. Nos preguntamos si ello tendrá algún significado más relacionado con la conexión y las ideas de «transporte paralelo». Para eso recordamos que

$$\int_{\partial S} \mathcal{A} = \int_S d\mathcal{A}$$

Si consideramos una curva cerrada $\gamma \in P$ parametrizada de 0 a 1 volvámonos a preguntar cómo manipularla para conseguir una curva «paralela» γg_t.

Como antes, la ecuación para g_t es

$$\frac{dg_t}{dt} = -\omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}\right) g_t$$

Busquemos una curva $X_t \in \mathfrak{g}$ tal que $g_t = exp(X_t)$, con ello, si G es conmutativo

$$\frac{d}{dt}X_t = -\omega_\gamma\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)$$

con lo que

$$X_1 - X_0 = -\int_\gamma \omega = -\int_S d\omega$$

y, el cambio de fase total sería dicha integral.

Ello indica que la derivada exterior de la conexión brinda información sobre lo que podríamos llamar curvatura.

En el caso de un grupo no abeliano no podemos seguir el mismo camino mas podemos hacernos la misma pregunta.

Para que sea más simple la idea consideremos que estamos en una trivialización local donde, además, la base se ve como $\mathbb{R}^n$. Consideremos dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, un punto $p \in U$ y el rectángulo

$$R : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$(s,t) \mapsto p + su + tv$$

Si pensamos en recorrer una vuelta en dicho rectángulo (de p a p) existirá un cambio de fase al final, que, posiblemente dependerá del tamaño del rectángulo. Algo interesante es que no necesitamos dar toda la vuelta para ver dicha comparación, podemos, en su lugar, recorrer dos caminos.

Consideremos dos funciones

$$g, h : [0,1] \times [0,1] \to G$$

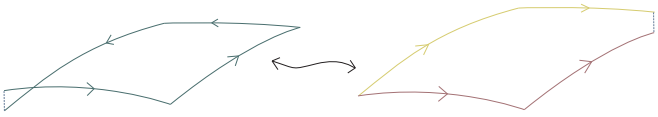

Figura 8.6: Lo que falta para cerrar la curva «constante» en la imagen de la izquierda es lo que falta para que coincidan las dos curvas «constantes» de la derecha

y pensémos a $g(s,t)$ y $h(s,t)$ encima de $R(s,t)$. Elijamos g y h de manera que las curvas $g(s,\cdot)$, $g(\cdot,t)$, $h(\cdot,t)$ y $h(s,\cdot)$ sean «constantes» (transportes paralelos).

Con ello, el cambio de fase estaría dado por

$$g(s,t)^{-1}h(s,t)$$

el límite cuando (s,t) tienden a cero es, claramente, la identidad. Si consideramos derivada en alguna de las direcciones y hacemos otra vez (s,t) tender a cero obtenemos nuevamente nada de información. Pensaremos, entonces, en la derivada en s y en t cuando $(s,t) = 0$. Ello estaría bien definido si consideramos un grupo de matrices (o, en general, un subgrupo de Lie de un álgebra). Este cambio de fase aparece, por ejemplo, si consideramos un vector $\sigma \in V$ y la sección

$$h(s,t)\sigma$$

Si derivamos en la dirección de v y luego en la dirección de u obtenemos

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}[g(s,t)^{-1}h(s,t)]\sigma$$

Ello nos sugiere una nueva definición. Intentemos con

$$D_u D_v S$$

La pregunta importante es si depende puntualmente de S. Para ello consideremos f, una función real en U, y fS el producto de f con S. Debería cumplirse $D_u D_v fS = fD_u D_v S$

$$\begin{aligned} D_u D_v fS &= D_u((df \cdot v)S + fD_v S) \\ &= d^2 f \cdot (u,v)S + df \cdot vD_u S + df \cdot uD_v S + fD_u D_v S \end{aligned}$$

Este resultado no se ve muy prometedor, pero notamos que es casi simétrico en u y en v. Se ve directamente que

$$(D_u D_v - D_v D_u) fS = f(D_u D_v - D_v D_u) S$$

El agregarle dicho término no cambia el resultado pues $D_v D_u h(s,t)\sigma = 0$

Es así que tenemos una opción para describir la curvatura de la conexión

$$D_u D_v - D_v D_u$$

Hacer dicha operación es exactamente igual que hacer D^2. Es decir, ya teníamos

$$D : \Omega_B^0(E) \to \Omega_B^1(E)$$

con ello podemos definir

$$D : \Omega_B^1(E) \to \Omega_B^2(E)$$

de la misma manera como solemos definir la derivada exterior de 1-formas. Más explícitamente, si consideramos la 1-forma

$$S dx_I$$

entonces

$$D(S dx_I) = D(S) \wedge dx_I$$

donde, si $D(S) = \sum_i a_i dx_i$ entonces

$$D(S) \wedge dx_I = \sum_i a_i \, dx_i \wedge dx_I$$

Con todo esto, podemos observar que

$$D^2 : \Omega_B^0(E) \to \Omega_B^2(E)$$

es una aplicación $C^\infty(B)$-lineal, es decir, es un tensor que en $x \in B$

$$D_x^2 : T_x M \times T_x M \to \mathcal{L}(E_x, E_x)$$

Un inconveniente de dicha idea es que no es intrínseco al fibrado principal (D está en un fibrado vectorial asociado). Para establecer una definición más intrínseca consideremos todo en una trivialización local.

$$D_u S = dS \cdot u + \omega(u)\, S$$

$$\begin{aligned} D_u D_v S &= D_u(dS \cdot v + \omega(v)\, S) \\ &= d^2S(u,v) + \omega(u)dS \cdot v + (d(\omega(v)) \cdot u)S + \omega(u)dS \cdot v + \omega(u)\omega(v)S \end{aligned}$$

con lo que

$$D_u D_v S - D_v D_u S = (d(\omega(u)) \cdot v - d(\omega(v)) \cdot u)S + [\omega(u), \omega(v)]S$$

$$D_u D_v - D_v D_u = (d^E\omega)(u,v) + [\omega(u), \omega(v)]$$

Con ello tenemos la 2-forma buscada. Lo que nos falta entender es cómo depende dicha forma de la trivialización.

Una manera directa de ver esto es recordar que

$$\bar{D}_u(gS) = gD_uS$$

donde $\bar{D}$ representa derivación en la nueva trivialización. Con ello,

$$\bar{D}_u = gD_ug^{-1}$$

entonces,

$$[\bar{D}_u, \bar{D}_v] = [gD_ug^{-1}, gD_vg^{-1}] = g[D_u, D_v]g^{-1}$$

esto indica que $[\bar{D}_u, \bar{D}_v]$ toma valores en el fibrado asociado a P con la acción adjunta en $\mathfrak{g}$.

En resumen, la curvatura es una 2-forma con valores en el fibrado «adjunto». Las fibras en el fibrado adjunto actúa de manera natural en cualquier fibrado asociado E. Esto es debido a cómo cambian las trivializaciones. Mientras que un vector v sufre el cambio

$$v \mapsto gv$$

un elemento en $F \in \mathfrak{g}$ sufre el cambio

$$F \mapsto gFg^{-1}$$

es decir,

$$Fv \mapsto g(Fv)$$

como se esperaría.

Con esta acción se relacionan las curvatura como 2-forma con valores en el fibrado adjunto y como 2-forma con valores el fibrado de aplicaciones lineales en V.

Entonces, hasta ahora hemos llegado a pensar en el potencial electromagnético como una conexión en un $U(1)$- fibrado principal y el campo electromagnético como la curvatura definida en el fibrado asociado a la acción adjunta.

Esto es fácilmente generalizable (y se hace usualmente). Se consideran grupos de mayor dimensión y no conmutativos. El principio variacional que cumple el campo electromagnético se puede ver en este contexto de la misma manera.

De manera más general, si el grupo es compacto, existe un producto interno en $\mathfrak{g}$ de manera que la acción adjunta es una acción ortogonal. En realidad tenemos algo más general:

Proposición 8.5. *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

Entonces, existe un producto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ tal que la representación ρ es ortogonal. Además ambos productos internos generan métricas equivalentes.

Demostración. Consideremos μ la medida de Haar en G de medida total uno. Definamos

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \int_G \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle \, d\mu_g$$

El que el integrando sea realmente integrable se sigue de que la representación es continua con la topología de la norma. El que sea invariante se sigue de la invarianza de μ. Podemos comparar ambos productos internos. Denotemos $\|\rho\| = \sup_{g \in G} \|\rho(g)\|$. Por un lado,

$$\langle\langle u, u \rangle\rangle \leq \int_G \|\rho(g)\|^2 \|u\| \|u\| \, d\mu_g \leq \|\rho\|^2 \|u\|^2$$

Por otro lado, notemos que

$$\|u\| \leq \|\rho(g^{-1})\| \|\rho(g)u\| \leq \|\rho\| \|\rho(g)u\|$$

Entonces,

$$\|u\|^2 = \int_G \|u\|^2 d\mu_g \leq \|\rho\|^2 \int_G \|\rho(g)u\|^2 \, d\mu_g \leq \|\rho\|^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle$$

Por lo que las métricas generadas son equivalentes.

□

Con ello podemos establecer una métrica en el fibrado asociado a dicha acción. Como en el fibrado base tenemos una métrica esto indica que en

el fibrado de 2-formas con valores en el fibrado anterior existe una métrica también. Es así que tenemos una acción, generalización de aquella asociada al campo electromagnético.

$$\int_M \langle F, F \rangle \, \mathrm{vol}$$

Capítulo 9

Electromagnetismo y mecánica cuántica

Ahora que tenemos una nueva descripción del campo electromagnético, regresemos a revisar cómo introducir este en la mecánica cuántica.

9.1. Ecuación de Schrödinger

Habíamos considerado la ecuación de Schrödigner

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Pensemos, entonces, que la función de onda es una sección de el fibrado vectorial E de fibra $\mathbb{C}$ asociado a un fibrado principal de fibra $U(1)$ junto con la acción usual de $U(1)$ en $\mathbb{C}$. Ya que los cambios de trivializaciones son isomorfismos complejos, obtenemos una estructura de espacio vectorial complejo en cada fibra de E. Es más, estos cambios nos permiten definir una estructura unitaria en cada fibra, es decir, un producto interno complejo.

Para simplificar, identifiquemos $\mathfrak{u}(1)$ con $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ En dicho contexto, introducir el electromagnetismo sería tan solo introducir una conexión.

El fibrado base sería el universo (no relativista), es decir, $B = \mathbb{R} \times M$, donde M es una variedad de dimensión 3.

Ya tiene sentido la expresión $\frac{\partial}{\partial t}\psi$, donde la derivación ahora es utilizando el campo electromagnético.

Démosle sentido a $\nabla^2\psi$. Usualmente considerábamos $\nabla^2\psi = \nabla \cdot \nabla\psi$.

Ahora $\nabla\psi \to D\psi$ más no tenemos un análogo del divergente.

Para construir un análogo, notemos que, para $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciables

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{F}) = (\nabla \alpha) \cdot \vec{F} + \alpha \nabla \cdot \vec{F}$$

Con ello tenemos relacionado el divergente con el gradiente. Si las aplicaciones consideradas son de soporte compacto, entonces, claramente

$$\int_{\mathbb{R}^4} (\nabla \alpha) \cdot \vec{F} = -\int_{\mathbb{R}^4} \alpha \nabla \cdot \vec{F}$$

es decir, el divergente es el dual del (menos) gradiente. Con ello, el divergente es el codiferencial δ. Deberíamos tener también

$$\nabla^2 \psi = \delta d \, \psi$$

Para poder escribir δ explícitamente, usamos anteriormente el dual de Hodge. ¿Qué sería el dual de Hodge en este caso?

Estamos considerando formas con valores en el fibrado vectorial E, es decir, si fijamos un punto $x \in B$ pensamos en una aplicación k-lineal alternada

$$\omega_x : T_x B \times ... \times T_x B \to E_x$$

$$\omega_x \in E_x \otimes (T_x B \wedge ... \wedge T_x B)$$

Como ya tenemos la aplicación $*$ de Hodge en $T_x B \wedge ... \wedge T_x B$, una manera de definir esta en $E_x \otimes (T_x B \wedge ... \wedge T_x B)$ es considerar $*_E = id_{E_x} \otimes *$.

Así, definimos

$$\delta_E = *_E \circ D \circ *_E$$

salvo un signo que depende de qué grado consideramos.

Veamos que δ_E es el dual de $-D$. Como ya tenemos un producto interno en E_x y uno en $T_x B \wedge ... \wedge T_x B$ tomaremos el producto tensorial de ambos productos internos. Es decir, si $u, v \in E_x$ y $\omega, \nu \in T_x B \wedge ... \wedge T_x B$ entonces

$$\langle u \otimes \omega, v \otimes \nu \rangle = \langle u, v \rangle \langle \omega, \nu \rangle$$

Proposición 9.1. *Sean $S \in \Omega^0_B(E)$ y $\omega \in \Omega^1_B(E)$ de soporte compacto.*

$$\int_B \langle \omega, DS \rangle vol + \int_B \langle \delta_E \omega, S \rangle vol = 0$$

Demostración. Utilizando particiones de la unidad, basta verificarlo para cuando el fibrado E y TM sobre B es trivial. Consideramos secciones ortonormales $e_1, ..., e_n$ y denotaremos por $dx_1, ..., dx_n$ a su dual.

Definimos el símbolo $\text{signo}_i = \langle dx_i, dx_i \rangle$ para simplificar la notación.

Además, denotaremos por subíndices a las componentes en esta base y no escribiremos los signos de sumatoria (si aparece dos o más veces el mismo índice hay que sumar).

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_B \langle \omega, DS \rangle vol &= \int_B \langle \omega_j \otimes dx_j, D_i S \otimes dx_i \rangle vol \\
&= \int_B \langle \omega_i, DS \cdot e_i \rangle \text{signo}_i \, vol \\
&= \int_B d\langle \omega_i, S \rangle \cdot e_i \, \text{signo}_i \, vol - \int_B \langle D_i \omega_i, S \rangle \text{signo}_i \, vol \\
&= \int_B d\langle \omega_i, S \rangle \cdot e_i \, \text{signo}_i \, vol - \int_B \langle D_i \omega_i, S \rangle \text{signo}_i \, vol
\end{aligned}$$

Y el otro término es

$$\begin{aligned}
\int_B \langle *D * (\omega_i \otimes dx_i),\, S \rangle vol &= \int_B \langle *D(\omega_i \otimes *dx_i),\, S \rangle vol \\
&= \int_B \langle *(D_j \omega_i \otimes dx_j \wedge *dx_i + \omega_i \otimes d * (dx_i)),\, S \rangle vol \\
&= \int_B \langle D_i \omega_i \, \text{signo}_i + \omega_i \otimes *d * (dx_i),\, S \rangle vol \\
&= \int_B \langle D_i \omega_i,\, S \rangle \text{signo}_i vol + \int_B \langle \omega_i \otimes *d * (dx_i),\, S \rangle vol \\
&= \int_B \langle D_i \omega_i \,,\, S \rangle \text{signo}_i vol + \int_B \langle \omega_i,\, S \rangle * d * (dx_i) vol
\end{aligned}$$

Queremos que se elimine un término... este podría ser

$$\begin{aligned}
0 = \int_B \delta(\langle \omega_i, S\rangle \, dx_i)\, vol &= \int_B *d*(\langle \omega_i, S\rangle \, dx_i)\, vol \\
&= \int_B *d(\langle \omega_i, S\rangle \ * dx_i)\, vol \\
&= \int_B *(d\langle \omega_i, S\rangle \ \wedge *dx_i + \langle \omega_i, S\rangle \, d*(dx_i))\, vol \\
&= \int_B d\langle \omega_i, S\rangle \cdot e_j \ *(dx_j \ \wedge *dx_i)\, vol + \int_B \langle \omega_i, S\rangle \ * d*(dx_i)\, vol \\
&= \int_B d\langle \omega_i, S\rangle \cdot e_i \, \text{signo}_i \, vol + \int_B \langle \omega_i, S\rangle \ * d*(dx_i)\, vol
\end{aligned}$$

Se sigue, entonces, que

$$\int_B \langle \omega, DS\rangle vol + \int_B \langle \delta_E \omega, S\rangle vol = 0$$

□

Definimos el laplaciano como

$$\Delta^t : \Omega^0_B(M) \to \Omega^0_B(M)$$

$$\Delta^t S = \delta_E d\, S$$

donde la derivada es la restricción de la conexión a M en el tiempo t.

Y regresando a la ecuación de Schrödinger, esta sería

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Para simplificar la notación, hagamos $\hbar = 1$

Con las ideas introducidas en el capítulo «Coderivada y el lagrangiano electromagnético» es fácil ver que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}\left\langle D^t\psi, D^t\psi\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \psi, i\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle$$

sirve como lagrangiano para la ecuación de Schrödinger, donde el producto interno es la parte real del producto interno complejo.

Finalmente, como ya conocemos el lagrangiano electromagnético podemos sumarlo con el de Schrödinger y obtenemos.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}\left\langle D^t\psi, D^t\psi\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \psi, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle$$

donde $\mathcal{F}$ es la curvatura de la conexión.

Perturbemos la conexión con un $\mathcal{A}$ de soporte compacto contenido en una trivialización.

$$D_s = D + s\,(i\mathcal{A})$$

y derivemos la acción en s.

$$\frac{d}{ds}a = \int_{M\times\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{m}\left\langle i\mathcal{A}^t\psi, D^t\psi\right\rangle + \langle\psi, \Phi\,\psi\rangle + \langle\mathcal{F}, d\mathcal{A}\rangle\right) vol$$

Si consideramos dicha trivialización unitaria

$$\frac{d}{ds}a = \int_{M\times\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2mi}\mathcal{A}^t(\bar{\psi}D^t\psi - \psi\bar{D}^t\bar{\psi}) + \Phi\bar{\psi}\psi + \langle\delta\mathcal{F}, \mathcal{A}\rangle\right) vol$$

con lo que, obtenemos

$$\delta\mathcal{F} = -\frac{1}{2mi}(\bar{\psi}D^t\psi - \psi\overline{D^t\psi}) + \|\psi\|^2 dt$$

Esto es, lo que obtuvimos como corriente sirve de fuente para el campo electromagnético.

9.2. Ecuación de Klein-Gordon

Terminaremos con la llamada ecuación de Klein-Gordon (aunque descubierta primero por Schrödinger).

Recordemos primero la relación entre momento y energía

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

con lo que, haciendo el reemplazo con operadores obtenemos

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + \nabla^2\psi = m^2\psi$$

conocida como ecuación de Klein-Gordon.

Para interpretar a la ψ podemos intentar como en el caso de la ecuación de Schrödinger.

Multiplicamos por ψ^* la ecuación de K-G. Luego, tomamos su conjugada y la multiplicamos por ψ.

$$-\psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + \psi^* \nabla^2 \psi = m^2 \psi^* \psi$$

$$-\psi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^* + \psi \nabla^2 \psi^* = m^2 \psi \psi^*$$

Restamos ambas ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right) + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

Así, tenemos una nueva corriente. La cantidad

$$-\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^*$$

debería ser interpretada de manera análoga a la densidad de probabilidad en el caso de Schrödinger. Sin embargo, esta puede ser negativa (notemos que si ψ satisface la ecuación de K-G entonces ψ^* también la satisface). Por ello necesitamos una interpretación diferente para esta cantidad: es una densidad de carga.

Coloquémosla en el nuevo contexto:

Tenemos una variedad de Lorenz (estructura de espacio-tiempo de Minkowski en cada espacio tangente) M, y tenemos un fibrado principal P con fibra $U(1)$ sobre M y E un fibrado vectorial complejo de dimensión uno asociado a P junto con la acción usual en $\mathbb{C}$.

Definimos el laplaciano en E de la manera mencionada antes y la ecuación de Klein-Gordon se convierte en

$$\Delta\psi + m^2\psi = 0$$

y el lagrangiano respectivo

$$\mathcal{L} = \langle D\psi, D\psi \rangle + \langle m\psi, m\psi \rangle$$

y, si le agregamos el campo electromagnético,

$$\mathcal{L} = \langle D\psi, D\psi \rangle + \langle m\psi, m\psi \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle$$

con lo que, realizando un procedimiento análogo al anterior obtenemos

$$\delta\mathcal{F} = i(\bar{\psi} D\psi - \psi \overline{D\psi})$$

donde hemos obtenido una nueva corriente.

En resumen, hemos descrito el campo electromagnético como una conexión en un $U(1)$-fibrado principal junto con una partícula sección de un fibrado vectorial. Este tipo de partículas son conocidas como bosones de spin cero. En realidad, luego de todo lo hecho es necesario «cuantizar» las secciones de este fibrado pero esto ya es otra historia.

Apéndice A

Cohomología de De Rham en abiertos de $\mathbb{R}^3$

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Los objetos a considerar son los campos escalares y vectoriales en U, esto es, las aplicaciones C^∞

$$\phi : U \to \mathbb{R} \qquad \text{(campo escalar)}$$

$$\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(campo vectorial)}$$

Los puntos de $\mathbb{R}^3$ serán denotados de manera usual como (x, y, z). Las componentes de $\vec{F}$ serán los campos escalares F_x, F_y y F_z. Recordamos el símbolo ∇ que va a denotar a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

y las operaciones que podemos hacer con él en los campos serían

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad \text{(gradiente de } \phi\text{)}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad \text{(rotacional de } \vec{F}\text{)}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{(divergente de } \vec{F}\text{)}$$

Estas serían las "derivaciones" más naturales sobre campos en U. De la manera en la que hemos hecho las definiciones podemos observar que

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

¿Qué interpretaciones podríamos darle a estas derivaciones?

El gradiente, por un lado, es un vector $\nabla\phi$ tal que

$$\vec{v} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{v}}$$

es decir, guarda la información de todas las derivadas direccionales. Una manera intrínseca de definirlo sería tomar el diferencial de ϕ y convertirlo en vector con ayuda del producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$.

El divergente, por otro lado, se podría definir considerando la traza del diferencial de $\vec{F}$. Como la traza es la derivada del determinante en la identidad, notamos que el divergente tiene que ver con un cambio de volumen infinitesimal. Si consideramos un prisma de lados l_x, l_y, l_z, con vértice en el punto (x_0, y_0, z_0) podemos considerar la integral del campo $\vec{F}$ a lo largo de la superficie de dicho prisma orientado según la normal exterior. Explícitamente, el prisma sería el que tiene vértices

$$(x_0 + \alpha l_1, y_0 + \beta l_2, z_0 + \gamma l_3) \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$$

Al integrar, por ejemplo, a lo largo de la cara con vértice (x_0, y_0, z_0) perpendicular al eje z, obtendríamos (aproximadamente)

$$-F_z(x_0, y_0, z_0) l_1 l_2$$

donde hemos tomado a $-F_z(x_0, y_0, z_0)$ como aproximación de la 'media' en esa cara y el signo menos se debe a la orientación escogida. Sumando los seis términos (uno para cada cara), obtenemos

$$[F_z(x_0, y_0, z_0 + l_3) - F_z(x_0, y_0, z_0)] l_1 l_2 +$$
$$[F_y(x_0, y_0 + l_2, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)] l_2 l_3 +$$
$$[F_x(x_0 + l_1, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)] l_3 l_1$$

que, dividido entre el volumen del prisma $l_1 l_2 l_3$ y haciendo l_1, l_2 y l_3 tender a cero sería

$$\nabla \cdot \vec{F}$$

lo que explica el nombre (mide qué tanto diverge el campo vectorial de un punto).

Si hacemos algo análogo en dimensión dos pero considerando integral de línea obtenemos que, si $\vec{F} = (F_x, F_y)$ es un campo en $\mathbb{R}^2$ y consideramos un rectángulo de lados l_1, l_2 con un vértice en (x_0, y_0) orientado en sentido antihorario, obtenemos que la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de dicho rectángulo es

$$F_x(x_0, y_0)l_1 + F_y(x_0 + l_1, y_0)l_2 - F_x(x_0, y_0 + l_2)l_1 - F_y(x_0, y_0)l_2$$

entre el área del rectángulo $l_1 l_2$ y haciendo l_1 y l_2 tender a cero obtenemos

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Esto nos hace recordar la definición de rotacional. Una interpretación natural del rotacional sería que

$$\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{F}$$

es igual a la integral a lo largo de un rectángulo infinitesimal ubicado en el plano perpendicular a $\hat{n}$ con la orientación correspondiente (usando la regla de la mano derecha) divida entre su área.

Las interpretaciones obtenidas hasta ahora nos sugieren el teorema conocido como teorema de Stokes:

$$\phi(p_f) - \phi(p_i) = \oint_{\partial\Gamma} \phi = \int_{\Gamma} \nabla\phi \cdot d\Gamma$$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\Gamma = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{S}}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\tilde{\mathrm{S}} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \mathrm{dV}$$

Una pregunta interesante es cuándo un campo tiene alguna primitiva con respecto a alguna de estas derivaciones. Por ejemplo, ¿cuándo un campo vectorial es el gradiente de un campo escalar? Notamos que si $\vec{F} = \nabla\phi$ entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$. Nos preguntamos si esta condición es suficiente. Si consideramos una curva cerrada, quisieramos que la integral a lo largo de dicha curva sea cero para poder obtener una primitiva. Por la ecuación del

teorema de Stokes que involucra el rotacional notamos que bastaría que la curva subtienda una superficie. Sin embargo, no siempre esto es posible (la región U puede tener obstrucciones), por lo que es de esperarse que no siempre sea una condición suficiente. Para estudiar mejor estas 'fallas' definimos

$$\begin{aligned} Z^0(U) &= \{\phi : U \to \mathbb{R}^3 / \ \nabla\phi = 0\} & B^0(U) &= \{\phi : U \to \mathbb{R}^3 / \ \phi = 0\} \\ Z^1(U) &= \{\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3 / \ \nabla \times \vec{F} = 0\} & B^1(U) &= \{\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3 / \ \vec{F} = \nabla\phi\} \\ Z^2(U) &= \{\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3 / \ \nabla \cdot \vec{F} = 0\} & B^2(U) &= \{\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3 / \ \vec{F} = \nabla \times \vec{G}\} \\ Z^3(U) &= \{\phi : U \to \mathbb{R}^3\} & B^3(U) &= \{\phi : U \to \mathbb{R}^3 / \ \phi = \nabla \cdot \vec{G}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(U) &= Z^0(U)/B^0(U) \\ H^1(U) &= Z^1(U)/B^1(U) \\ H^2(U) &= Z^2(U)/B^2(U) \\ H^3(U) &= Z^3(U)/B^3(U) \end{aligned}$$

El espacio vectorial $H_k(U)$ recibe el nombre de k-ésimo grupo de cohomología de U. Nos otorga información topológica acerca de U. Por ejemplo, la dimensión de $H_0(U)$, si es finita, nos indica la cantidad de componentes conexas de U.

El ejemplo más sencillo es el del 0-ésimo grupo de cohomología. Este indica la cantidad de componentes conexas. Explícitamente, si χ es la cantidad de componentes conexas del abierto $U \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$H^0(U) \simeq \mathbb{R}^\chi$$

Al primer nivel (es decir, $H^1(U)$), el grupo de cohomología está relacionado al grupo fundamental. Por ejemplo, si el grupo fundamental de U es nulo, entonces $H^1(U) = 0$ o, si el grupo fundamental de U es $\mathbb{Z}$, $H^1(U) \simeq \mathbb{R}$.

Al segundo nivel (es decir, $H^2(U)$), el grupo de cohomología está relacionado al segundo grupo de homotopía. Por ejemplo, si consideramos $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces $H^2(U) \simeq \mathbb{R}$ y es generado por el campo

$$\vec{G} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{G}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Si considearmos $\mathbb{R}^3$ menos n puntos, el grupo de cohomología será isomorfo a $\mathbb{R}^n$ y los generadores serían el campo G desplazado adecuadamente.

Con esto terminamos de comentar la cohomología de subconjuntos en $\mathbb{R}^3$ para pasar a comentar la cohomología en variedades diferenciables en general.

Apéndice B

Cohomología de De Rham

Pensemos primero en generalizar las tres operaciones principales que definimos con ∇.

Si queremos definir una derivación consistente con el apéndice anterior pero sin utilizar toda la estructura mencionada podemos notar que, si queremos realizar la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de una curva

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$$

basta con considerar la forma lineal $\left\langle \vec{F}, \cdot \right\rangle$. Es decir, de una manera más intrínseca podemos integrar 1-formas a lo largo de caminos en lugar de campos vectoriales (para los que necesitaríamos un producto interno).

De igual manera, al realizar una integral de superficie consideramos una parametrización $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ y la integral del campo $\vec{F}$ es

$$\int_U \left\langle \vec{F}(\phi(x,y)), \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle dxdy$$

pero, si no requerimos de un producto interno, podemos pensar en $\vec{F}$ como una 2-forma, es decir, una aplicación diferenciable $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ donde $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de todas las formas bilineales antisimétricas en $\mathbb{R}^3$. La integral de superficie sería

$$\int_U F\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy$$

Por último, la integral de volumen, no necesita de mucha estructura, pero si deseamos ponerla en un contexto análogo podríamos pensar en integrar

3-formas, es decir, aplicaciones diferenciables $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ donde $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ es el espacio de todas las formas trilineales alternadas en $\mathbb{R}^3$. Podemos pensar en la aplicación identidad como la parametrización considerada con lo que la integral se vería como

$$\int_V F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) dxdydz$$

Ahora, si consideramos M una variedad diferenciable de dimensión n y ω una n-forma, podemos definir $\int \omega$ utilizando una parametrización $\phi : U \to M$ (si ω se soporta en dicha parametrización).

$$\int_M \omega = \int_U \omega\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right) dx_1...dx_n$$

La buena definición de ello es debido a que, si consideramos $T : A \to B$ difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y ω una n-forma en B de soporte compacto (en B)

$$\int_A T^*\omega = \int_B \omega$$

Luego de aprender a integrar formas en variedades, necesitamos introducir una derivación que sea análoga al ∇. Ya que la derivada de una k-forma tiene que poder integrarse en un objeto de dimensión $k+1$, consideremos una $n-1$-forma en $\mathbb{R}^n$ que se escriba como $F\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$. Integremos esta $n-1$-forma en la superficie del paralelepípedo con vértices

$$(x_1 + \alpha_1 l_1, ..., x_n + \alpha_n l_n) \text{ con } \alpha_i \in \{0, 1\}$$

Podemos darnos cuenta que solo hay dos caras donde la integral es diferente de cero: Las caras perpendiculares a e_n. Con ello la integral es (eligiendo la orientación hacia afuera)

$$(F_{x+e_n l_n} - F_x)\, l_1...l_{n-1}$$

Si queremos una analogía con el caso de $\mathbb{R}^3$ debemos dividir entre l_n y multiplicar por él.

$$\frac{(F_{x+e_n l_n} - F_x)}{l_n} l_1...l_n \simeq \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) l_1...l_n$$

Con ello, la derivada de $F\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$ tiene que ser

$$dF \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$$

que vendría a ser una antisimetrización de

$$dF \otimes dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{n-1}$$

que es la derivada usual. Así definimos la derivada de una k-forma ω como la antisimetrización de

$$\frac{d\omega^A}{k!}$$

donde $d\omega$ es la derivada usual y el superíndice A denota antisimetrización definido en tensores simples por

$$u_1 \otimes ... \otimes u_n = \sum_I (-1)^{\sigma(I)} u_{i_1} \otimes ... \otimes u_{i_n}$$

donde $I = (i_1, ..., i_n)$ y $\sigma(I)$ denota al signo de la permutación $(1, ..., n) \mapsto I$.

Como es esperado, esta derivada está bien definida en una variedad diferenciable arbitraria.

Consideremos, entonces, una variedad M. Denotemos por $\Omega^k(M)$ al espacio de todas las k-formas en M. Definamos

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) / \ d\omega = 0\}$$

el núcleo de la nueva derivación. Sus elementos serán llamados k-formas cerradas. Definamos también

$$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) / \ \exists \nu \in \Omega^{k-1}(M) : \omega = d\nu\}$$

la imagen de la nueva derivación. Sus elementos serán llamados k-formas exactas. Definiremos también $B^0(M) = \{0\}$. Y, por último, el cociente (notar que $B^k(M) \subset Z^k(M)$)

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

que será llamado k-ésimo grupo de cohomología de M.

Una pregunta importante es si los grupos de cohomología en realidad capturan información topológica, es decir, si dos variedades M y N son homeomorfas sus grupos de cohomología son isomorfos (como espacios vectoriales). Para ello queremos que un homeomorfismo $f : M \to N$ genere un isomorfismo $f_* : H^k(M) \to H^k(N)$. El inconveniente es que el grupo de cohomología está bien definido en la categoría diferenciable por lo que ello no sería tan natural. Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ sí genera un morfismo $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$ de manera natural. Este es, simplemente,

inducido por el pullback en k-formas. Su buena definición se sigue de que $f^*d\omega = d(f^*\omega)$, propiedad que es importante para verificar directamente la buena definición de la nueva derivada.

Para definir el pullback de una aplicación continua podríamos, entonces, intentar «aproximar» dicha función continua por una diferenciable y definir el pullback como el pullback de la aplicación diferenciable. El inconveniente es que, para su buena definición, necesitamos que dos aplicaciones difenciables «cercanas» posean el mismo pullback. La noción de cercanía más burda sería la noción de conexidad, es decir, la homotopía (entre aplicaciones).

Consideremos dos aplicaciones $f, g : M \to N$ tal que existe una aplicación $H : [0,1] \times M \to N$ diferenciable con

$$H(0,x) = f(x) \qquad H(1,x) = g(x) \qquad \forall x \in M$$

es decir, H es una homotopía diferenciable entre f y g (más estrictamente de f a g).

Esperemos que $f^* = g^*$

Teorema B.1. *Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. Sean $f, g : U \to V$ aplicaciones diferenciables y H una homotopía diferenciable entre ellas. Se cumple que $f^* = g^*$.*

Demostración. Ya que tenemos una homotopía diferenciable, podemos definir $H^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k([0,1] \times U)$. Así, si consideramos las aplicaciones

$$i_0 : U \to [0,1] \times U \qquad\qquad i_1 : U \to [0,1] \times U$$

$$x \mapsto (0,x) \qquad\qquad x \mapsto (1,x)$$

Nos damos cuenta que, ya que $f = H \circ i_0$ y $g = H \circ i_1$, se cumple $f^* = i_0^* \circ H^*$ y $g^* = i_1^* \circ H^*$.

Lo que necesitamos es que, si $\omega \in Z^k(V)$, entonces $f^*(\omega) - g^*(\omega) \in B^k(V)$. Con la relación anterior, nos damos cuenta que solo necesitamos que si $\omega \in Z^k([0,1] \times U)$ entonces $i_0^*(\omega) - i_1^*(\omega) \in B^k(V)$.

Para ello usaremos la notación $(t, x_1, ..., x_m) \in [0,1] \times U$ y las notaciones análogas para formas. Con esto,

$$\omega = \sum_I E_I dx_I + \sum_J B_J dt \wedge dx_J$$

y podemos escribir

$$i_0^*(\omega)(x) = \sum E_I(0,x) dx_I$$

$$i_1^*(\omega)(x) = \sum E_I(1,x)dx_I$$

Sabemos que ω es cerrada. Hallemos $d\omega$

$$d\omega = \sum_I \left(d(E_I)_x + \frac{\partial E_I}{\partial t} dt \right) \wedge dx_I + \sum_J d(B_J)_x \wedge dt \wedge dx_J = 0$$

donde el subíndice x indica que es derivada solo en $x \in U$ sin considerar la variable t. Considerando solo la parte que contiene a la variable t, tenemos

$$dt \wedge \left(\sum_I \frac{\partial E_I}{\partial t} dx_I - \sum_J d(B_J)_x \wedge dx_J \right) = 0$$

es decir, lo que está entre paréntesis se anula.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_I E_I dx_I = \sum_J d(B_J)_x \wedge dx_J$$

Esta relación es muy similar a la ley de Faraday y sería otra motivación para la notación en formas diferenciables dada en el capítulo 4.

Lo que hemos logrado verificar, entonces, es que el cambio infinitesimal entre los pullback es exacto, de donde se sigue que el cambio total es exacto (utilizando la regla de Leibniz para intercambiar derivada en x con integración en t).

□

Ahora, para verificar el mismo teorema pero entre variedades basta ver que la curva de formas $\sum_J B_J dx_J$ está bien definida. Pero ello es cierto, pues basta considerar $i_t^*(\iota_{\hat{t}}(\omega))$ donde $\iota_{\hat{t}}$ es el producto interior con el campo (globalmente definido) $\hat{t}$.

Con esto, podemos verificar el siguiente

Teorema B.2 (Invarianza por homotopía)**.** *Sean M y N variedades diferenciables.*

Si M es homotópica a N entonces $H^k(M) \simeq H^k(N)$ para todo k.

Demostración. Recordemos primero que

1. Toda aplicación continua es homotópica a una diferenciable.

2. Si dos aplicaciones diferenciables son continuamente homotópicas, también son diferenciablemente homotópicas.

Así si $f : M \to N$ y $g : N \to M$ son inversas homotópicas, entonces existen $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ diferenciables homotópicas a f y g respectivamente. Se sigue que son inversas homotópicas. Luego, $f \circ g$ es también diferenciablemente homotópica a la identidad por lo que

$$g^* \circ f^* = id_{H^k(N)}$$

De la misma manera

$$f^* \circ g^* = id_{H^k(M)}$$

y queda demostrado lo afirmado. □

De esto se sigue la invarianza por homeomorfismos.

Apéndice C

Campos vs formas

En el apéndice A y en el apéndice B hablamos sobre cohomología de dos maneras distintas. Relacionémoslas.

Antes que nada, nuestro contexto será $\mathbb{R}^3$ como espacio orientado con producto interno. Denotaremos a la base canónica por $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ y a su dual como $\{dx, dy, dz\}$

De esta manera, un vector $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ se puede ver también como una 1-forma.

$$A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \longleftrightarrow A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

Es más, utilizando el dual de Hodge, se puede ver también como una 2-forma

$$A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \longleftrightarrow A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$$

De la misma manera, una 3-forma se puede ver como un número real. Sea $a \in \mathbb{R}$, la relación es

$$a dx \wedge dy \wedge dz \longleftrightarrow a$$

Para simplificar la notación además de considerar $\bigwedge^*(\mathbb{R}^3)$ usaremos $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ con lo que una k-forma se verá también en $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$.

Ahora, consideremos los dos símbolos d y ∇. Si $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ entonces, esencialmente

$$\nabla\phi = d\phi$$

(donde la relación es gracias al producto interno).

¿Qué serán el rotacional $\nabla\times$ y el divergente $\nabla\cdot$?

Para proceder intuitivamente, pensemos en el producto vectorial $\times$.

Recordemos que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = vol(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$$

pero, otra vez, esencialmente

$$*(vol(\vec{A},\vec{B},\vec{C})) = \vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}$$

donde la relación viene dada por el dual de Hodge.

Con ello,

$$\left[(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}\right]\ \hat{x}\wedge\hat{y}\wedge\hat{z} = (\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$$

es decir, esencialmente

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\wedge\vec{B}$$

Así, el producto vectorial es, simplemente, el producto exterior de 1-formas.

¿Y el producto interno?

El producto interno sería simplemente el producto interno de siempre... pero también podríamos entenderlo como sigue

$$*(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\wedge *\vec{B}$$

Así, podemos entender de una manera más intuitiva (en realidad, formalmente) qué es el rotacional y el divergente.

$$\nabla\times\vec{F} = d\wedge\vec{F}$$

lo que sería simplemente la derivada exterior para 1-formas.

$$*(\nabla\cdot\vec{F}) = d\wedge *\vec{F}$$

es decir

$$\nabla\cdot\vec{F} = -\delta\vec{F}$$

Con esto, podemos relacionar directamente los grupos de cohomología definidos.

Otra propiedad que utilizamos anteriormente (capítulo 1) es

$$\nabla^2\vec{F} = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla\times\nabla\times\vec{F}$$

la cual es reminiscente de la relación

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

reemplazando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por ∇ y $\vec{C}$ por $\vec{F}$.

En el contexto de formas esta relación se convierte en la definición de laplaciano. Recordemos que, si ω es una 1-forma, entonces

$$\Delta\omega = \delta d\omega + d\delta\omega$$

y, si consideramos

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = -d\delta\vec{F}$$
$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = d * d\vec{F}$$

obtenemos

$$\Delta\vec{F} = -\nabla^2\vec{F}$$

Apéndice D

Cono de luz

Fijemos un espacio-tiempo orientado temporalmente con cono temporal positivo T^+

Ya sabemos que el espacio T de vectores temporales se divide en dos componentes conexas, T^+ y $T^- = -T^+$

En este apéndice estudiaremos el conjunto de vectores luminosos

$$\bar{C} = \{v \in V/\ Q(v) = 0\} \qquad C = \bar{C} - \{0\} \text{ (cono de luz)}$$

($\bar{C}$ es, en realidad, la clausura de C pues $\bar{C}$ es cerrado y el cero es punto de acumulación de C).

Lo primero que podemos darnos cuenta (gráficamente) es que C también estaría conformado por dos componentes conexas las cuales, intuitivamente, deberían ser el borde de T^+ y T^- (sin el cero).

Primero notemos que, si u es un vector de luz y v es temporal entonces $B(u, v) \neq 0$ pues de lo contrario B restricta al espacio ortogonal a v no sería definido positiva.

¿Qué sucede si u y v son vectores de luz y $B(u, v) = 0$? Si u y v fueran linealmente independientes entonces generarían un espacio «de luz» L de dimensión dos y, si consideramos un espacio P «positivo» de dimensión tres, tendríamos que $L \cap P = \{0\}$ y $dim\, L + dim\, P > 4$ lo que es una contradicción. Con esto, si u y v luminosos son ortogonales, entonces son paralelos.

Fijemos $e_0 \in T^+$ normalizado y consideremos

$$C^+ = \{x \in V/\ Q(x) = 0,\ B(x, e_0) > 0\}$$

$$C^- = \{x \in V/\ Q(x) = 0,\ B(x, e_0) < 0\}$$

uno el opuesto del otro. Debido a la continudad de $B(\cdot, e_0)$ y a que no toma el valor cero en C sabemos que un elemento de C^+ no se puede conectar con uno de C^- manteniéndose en C. Queremos verificar que ambos son conexos.

Proposición D.1. *C^+ es conexo (y, por lo tanto, $C^- = -C^+$ también lo es) si la dimensión del espacio-tiempo es mayor o igual que 3.*

Demostración. Para verificar esto tomemos el espacio afín

$$A = e_0 + e_0^\perp = \{v \in V / \ B(v, e_0) = 1\}$$

que representa al conjunto de eventos que ocurren en el instante $t = 1$.

Los haces de luz que parten en el origen al instante uno deben estar ubicados en una esfera de radio uno con centro en el observador. Esto es, si dotamos a A de la estructura de espacio vectorial con producto interno inducida por la función

$$e_0^\perp \to A$$

$$x \mapsto e_0 + x$$

Notamos que, con esta estructura, $A \cap L^+$ es la esfera de radio uno en A. Esto es, $x \in e_0^\perp$ está en la esfera de radio uno, es decir, $B(x, x) = -1$ si y solo si $B(x + e_0, x + e_0) = 0$. Una manera más directa de verlo es en coordenadas. La condición en este caso es simplemente

$$1^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

que claramente identifica a una esfera.

Ahora basta notar que si $u \in L^+$ entonces $\frac{u}{B(u,e_0)} \in L^+$ se encuentra en A con lo que podemos formar un retracto por deformación y el tipo de homotopía de L^+ sería el de una esfera de dimensión uno o más.

Para ver directamente la conexidad, basta ver que todo punto de L^+ se puede conectar con un punto en la esfera.

□

Por la conexidad de T^+, para todo $u \in C^+$ y $v \in T^+$ se cumple que $B(u, v) > 0$. Gracias a esto podemos ver que la suma de un vector en C^+ con uno en T^+ está en T^+. Verifiquemos que C^+ es el borde de T^+ sin el cero.

Proposición D.2. *$\partial T^+ - \{0\} = C^+$ (y, por lo tanto, $\partial T^- - \{0\} = C^-$)*

Demostración. Sea $u \in C^+$, consideremos $t \in T^+$ arbitrario, entonces

$$u + t/n \to u \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

es decir, $C^+ \subset \partial T^+$

Como T^+ es abierto, $\partial T^+ \subset V - T^+$.

Como T^- es abierto, $\partial T^+ \subset V - T^-$.

Con esto, si $u \in \partial T^+$ entonces $Q(u) = 0$, es decir, $\partial T^+ \subset C$.

Como $B(e_0, v) > 0$ para todo vector en T^+ lo mismo pasará para cada vector no nulo en ∂T^+ por lo que $\partial T^+ - \{0\} \subset C^+$. Por lo tanto,

$$\partial T^+ - \{0\} = C^+$$

□

Ahora, podemos ver que si $u, v \in C^+$ entonces $B(u, v) \geq 0$ y es cero si y solo si son proporcionales. De ello se sigue que $u + v \in T^+$ si u y v no son proporcionales.

Apéndice E

Teorema de Zeeman

Consideremos un espacio-tiempo de Minkowski V orientado temporalmente, es decir, con T^+ escogido. Tenemos ya definido C^+ del apéndice anterior.

Definición E.1. *Diremos que una biyección $f : V \to V$ es un isomorfismo de luz si se cumple que, $\forall x, y \in V$*

$$f(x) - f(y) \in C^+ \iff x - y \in C^+$$

El objetivo de este apéndice es determinar todos los isomorfismos de luz.

Primero que nada, podemos relacionar el cono de luz con el cono de tiempo. En realidad, un morfismo de luz también satisface

Proposición E.1. *Sea f un isomorfismo de luz, entonces*

$$f(x) - f(y) \in T^+ \iff x - y \in T^+$$

Demostración. Recordemos que la suma de vectores en C^+ resulta ser un vector en $T^+ \cup C^+$. Equivalentemente, si $x, y \in V$ y existe un $z \in V$ tal que $z - y$, $x - z \in C^+$ entonces $x - y \in T^+ \cup C^+$

Recíprocamente, $x - y \in T^+ \cup C^+$ implica que existe un $z \in V$ tal que $z-y$, $x-z \in C^+$. En caso $x-y \in C^+$, podemos tomar, simplemente, $z = (x+y)/2$. Caso contrario, tomemos un vector cualquiera $l \in C^+$ y consideremos la recta parametrizada por $s \in \mathbb{R}$ y dada por $s \to sl$. Busquemos que el punto z sea de la forma $z = y + sl$ para algún s. Este punto también debe cumplir que $x - z \in C^+$, es decir, $Q(x - y - sl) = 0$. Pero $Q(x - y - sl) = Q(x-y) - 2sB(x-y, l)$ es mayor a cero en $s = 0$ y, dado que $B(x-y, l) > 0$, tiende a menos infinito cuando s crece. Esto quiere decir, por continuidad,

que, para algún $s > 0$, esta cantidad es igual a cero con lo que hemos conseguido el z buscado.

Entonces, un isomorfismo de luz f satisface que

$$\begin{aligned} x - y \in T^+ &\iff \exists z \in V \text{ tal que } x - z,\, z - y \in C^+ \text{ pero } x - y \notin C^+ \\ &\iff \exists z \in V \text{ tal que } f(x) - f(z),\, f(z) - f(y) \in C^+ \text{ pero } f(x) - f(y) \notin C^+ \\ &\iff \exists f(z) \in V \text{ tal que } f(x) - f(z),\, f(z) - f(y) \in C^+ \text{ pero } f(x) - f(y) \notin C^+ \\ &\iff f(x) - f(y) \in T^+ \end{aligned}$$

□

Lo siguiente que podemos darnos cuenta es que tales isomorfismos de luz son aplicaciones continuas. Para ello notemos que podemos formar una base de la topología de V ayudándonos de los conos temporales (positivos y negativos). Lo que verificamos en la proposición anterior es que una de tales biyecciones lleva un cono temporal positivo en un cono temporal positivo y, al mismo tiempo, uno negativo en uno negativo. Sea $x \in V$, denotemos

$$T_x^+ = T^+ + x \qquad T_x^- = T^- + x$$

Los elementos básicos a considerar serán, para cada $x, y \in V$

$$T_{(xy)} = T_x^- \cap T_y^+$$

Proposición E.2. *El familia $\{T_{(xy)}\}_{x,y\in V}$ forma una base para la topología usual en V.*

Demostración. Primero, notemos que dicha familia está conformada por abiertos. Luego, consideremos una base ortonormal $\{e_\mu\}$ y con ello un producto interno definido positivo (para obtener la topología usual en V). La relación entre la forma cuadrática nueva y la antigua es

$$Q_{\text{ positivo }}(v) = 2v_0^2 - Q(v)$$

donde v_0 es la componente asociada a e_0.

Dado que la base de bolas y la familia $\{T_{(xy)}\}_{x,y\in V}$ son invariantes por traslaciones y rescalamientos, podemos simplificar la prueba (la notación, en realidad). Tomemos la bola centrada en $0 \in V$ y de radio 1 y busquemos un cono positivo y uno negativo tal que su intersección esté contenida en dicha bola y contenga al punto 0. Los conos buscados son fáciles de visualizar. Tomemos, los vértices e_0 y $-e_0$ y el cono negativo y positivo asociados

respectivamente a dichos vértices, es decir, tomemos $T_{(e_0,-e_0)}$. Consideremos un punto a en la intersección de dichos conos. Entonces,

$$e_0 - a \in T^+$$

$$e_0 + a \in T^+$$

y lo que queremos verificar es que

$$2a_0^2 - Q(a) < 1$$

Notemos que, si $a_0 \geq 0$ entonces

$$1 + Q(a) - 2a_0 = Q(e_0 - a) > 0$$

y, como $a_0 < 1$ (pues $e_0(e_0 - a) > 0$), tenemos que

$$1 + Q(a) - 2a_0^2 > 1 + Q(a) - 2a_0 > 0$$

que es lo que queríamos verificar.

Y, si $a_0 < 0$, podemos usar que

$$1 + Q(a) + 2a_0 = Q(e_0 + a) > 0$$

con lo que, otra vez, por $a_0 > -1$, tenemos

$$1 + Q(a) - 2a_0^2 > 1 + Q(a) + 2a_0 > 0$$

□

Así, hemos verificado que dichas intersecciones de conos positivos y negativos forman una base y, por lo tanto, los isomorfismos de luz son homeomorfismos.

Verificaremos que un isomorfismo de luz lleva rectas en rectas. Y lo que se esperaría de dicho resultado es que dicho isomorfismo sea lineal (afín), ello se verificará en el siguiente apéndice.

Primero podemos darnos cuenta de que lleva rectas de luz en rectas de luz (una recta de luz sería el desplazado de subespacio generado por un vector de luz).

Fijemos la siguiente notación:

$$C = \{v \in V / \ Q(v) = 0\}$$

y, si $x \in V$ entonces

$$C_x = C + x$$

Proposición E.3. *Un isomorfismo de luz lleva rectas de luz en rectas de luz.*

Demostración. Esto es debido a que lleva conos de luz en conos de luz.

Consideremos una recta de luz L y dos puntos $x \neq y \in L$, entonces verifiquemos que $L = C_x \cap C_y$.

El que $L \subset C_x \cap C_y$ se debe a que $x - y \in C$.

El que $C_x \cap C_y \subset L$ se debe a que, si $z \in C_x \cap C_y$, entonces $z-x$, $z-y \in C$ y, por lo tanto, como $(z-x)+(x-y) = z-y$, $B(z-x,\, x-y) = 0$, lo cual solo es posible si $(z-x) \parallel (x-y)$.

Así, rectas de luz son enviadas en rectas de luz. □

¿Será que envía planos en planos?

El primer plano que podríamos considerar es el ortogonal a un vector de luz. Estos son subespacios de codimensión uno donde B es degenerado. Consideraremos sus desplazados.

Proposición E.4. *Un isomorfismo de luz lleva desplazados de subespacios «degenerados» de codimensión uno en conjuntos del mismo tipo.*

Demostración. Consideremos un vector $a \in C^+$ y la recta de luz $L = \langle a \rangle$ generada por él. Tomemos el plano

$$P = L^\perp$$

Verifiquemos que

$$P = \partial \bigcup_{x \in L} T_x^+$$

Para ello basta ver que

$$\bigcup_{x \in L} T_x^+ = \{y \in V / \, B(a,y) > 0\}$$

Una inclusión es directa: Si $y \in T_x^+$ con $x = \lambda a \in L$, entonces $y = x + (y - x) = \lambda a + (y - x)$ con lo que $B(a,y) = B(a, y-x) > 0$.

Por otro lado, si $B(a,y) > 0$ podemos tomar λ lo suficientemente negativo tal que $Q(y - \lambda a) = Q(y) - 2\lambda B(a,y) > 0$.

Con esto, considerando desplazamientos y utilizando la continuidad, queda verificado lo deseado. □

Si consideramos un subespacio vectorial espacial de codimensión dos, lo podemos realizar como la intersección de dos subespacios del tipo antes mencionado. Para ello consideramos, primero, su espacio ortogonal (de dimensión dos con exactamente dos rectas de luz). Tomemos las dos rectas de luz y notemos que dicho espacio de codimensión dos está incluido en la intersección de los espacios ortogonales a dichas rectas. Fijándonos en las dimensiones de los espacios notamos que la intersección debe ser exactamente el espacio deseado. Es por ello que los isomorfismos de luz llevan subespacios espaciales de codimensión dos en otros del mismo tipo. Entonces, un isomorfismo de luz envía desplazados de subespacios espaciales de codimensión dos en conjuntos del mismo tipo.

De la misma manera, si consideramos un subespacio espacial de codimensión tres, podemos tomar una base ortonormal en él y extenderla a una base ortonormal de V. Con esto, considerando los dos vectores espaciales de la base que no están en dicho subespacio, podemos ver que él es intersección de dos subespacios de codimensión dos.

Proseguimos hasta llegar a considerar rectas espaciales.

Proposición E.5. *Un isomorfismo de luz lleva rectas espaciales en rectas espaciales.*

Falta ver que uno de tales isomorfismos lleva rectas temporales en rectas temporales. Notemos que toda recta temporal es intersección de dos subespacios no degenerados de dimensión dos y de índice uno. Podemos ver ello tomando una base como antes.

Basta verificar, entonces, que un isomorfismo de luz lleva desplazados de dichos espacios de dimensión dos en análogos. Fijemos uno de tales subespacios. Tomemos una base $\{e_0, e_1\}$. Verifiquemos que la imagen de dicho subespacio es análogo. Los vectores $e_0/2 + e_1$ y $e_0/2 - e_1$ son espaciales con lo que tenemos dos rectas espaciales. Veamos que la imagen de dichos subespacios generan (como espacio afín) a la imagen del subespacio de dimensión dos considerado. Sea x un punto en dicho espacio (generado por e_0 y e_1). La recta que pasa por x y tiene dirección e_1 es una recta espacial contenida en dicho plano y cruza a las recta $\langle(e_0/2 + e_1)\rangle$ y $\langle(e_0/2 - e_1)\rangle$ en los puntos $2B(x, e_0)(e_0/2 + e_1)$ y $2B(x, e_0)(e_0/2 - e_1)$, respectivamente. Por lo tanto, su imagen es una recta espacial que cruza a las imágenes de las rectas $\langle(e_0/2 + e_1)\rangle$ y $\langle(e_0/2 - e_1)\rangle$ con lo que pertenece al espacio afín generada por ambas.

Proposición E.6. *Un isomorfismo de luz lleva rectas en rectas*

Y, por el apéndice E son transformaciones lineales afines.

Tomemos una transformación lineal f que es un isomorfismo de luz. Tomemos un vector temporal e_0 normalizado. Llamemos $\bar{e}_0$ a su imagen. Consideremos r un vector espacial normalizado ortogonal a e_0 y $\bar{r}$ su imagen. Entonces, f envía $e_0 + r$ en $\bar{e}_0 + \bar{r}$. Como $e_0 + r$, $e_0 - r$ son vectores de luz, $\bar{e}_0 + \bar{r}$ y $\bar{e}_0 - \bar{r}$ también son vectores de luz y, por lo tanto,

$$Q(\bar{e}_0) + 2B(\bar{e}_0, \bar{r}) + Q(\bar{r}) = Q(\bar{e}_0 + \bar{r}) = 0$$

$$Q(\bar{e}_0) - 2B(\bar{e}_0, \bar{r}) + Q(\bar{r}) = Q(\bar{e}_0 - \bar{r}) = 0$$

Es decir,

$$Q(\bar{e}_0) + Q(\bar{r}) = 0$$

$$B(\bar{e}_0, \bar{r}) = 0$$

Esto es, f restricta a $e_0^{\perp}$ es el múltiplo de una aplicación ortogonal y, si tomamos $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal, con las consideraciones anteriores, su imagen por f es un múltiplo de una base ortonormal. Esta prueba sirve también para verificar la siguiente

Proposición E.7. *Sea V un espacio vectorial real y Q_1, Q_2 dos formas cuadráticas en V tal que*

$$\{v \in V / \, Q_1(v) = 0\} = \{v \in V / \, Q_2(v) = 0\} \neq \{0\}$$

entonces, $Q_1 = \lambda Q_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Con ello hemos verificado que un isomorfismo de luz es una aplicación ortogonal que preserva la orientación temporal salvo traslaciones y dilataciones (positivas).

Apéndice F

Rectas en rectas

Sabemos que todo isomorfismo lineal lleva rectas en rectas. En este apéndice queremos probar que toda biyección que lleve rectas en rectas (y preserve el origen) es un isomorfismo. Notamos que esta propiedad no se cumple si el espacio tiene dimensión 1, pues toda biyección lleva la única recta en la única recta. Por lo tanto, nos serán útiles los subespacios de dimensión 2.

Empezaremos con la siguiente

Definición F.1 (rectas)**.** *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Una recta en V es un subconjunto R tal que $D_R = \{b - a \in V / \ a, b \in R\}$ es un subespacio de dimensión 1 y no existe $R' \supsetneq R$ tal que $D_{R'}$ tiene dimensión 1.*

Notamos que si $R \subset V$ es una recta, y $a \in R$ entonces se cumple que $R = a + D_R = \{a + x \in V / \ x \in D_R\}$. Recíprocamente notamos que si W es un subespacio de dimensión 1 y $a \in V$ entonces $a + W$ es una recta.

Proposición F.1. *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Dados $a \neq b \in V$ existe una única recta R_{ab} que los contiene.*

Demostración. Tomamos $W = \langle b - a \rangle$ el subespacio generado por $b - a$. Tenemos entonces que $R_{ab} = a + W$ es la única recta que los contiene pues, si alguna recta R_2 los contiene, entonces D_{R_2} contiene a $b - a$ y, por ser de dimensión 1, es igual a W. Entonces $R_2 = a + W$. □

Vamos a denotar por $R_x \subset \mathbb{R}^2$ a la recta que contiene a los puntos (0,0) y a (1,0) (el eje x) y por $R_y \subset \mathbb{R}^2$ a la recta que contiene a (0,0) y a (0,1) (el eje y). Notamos que $R_x = \langle (1, 0) \rangle$ (el subespacio generado por $(1, 0)$) y que $R_y = \langle (0, 1) \rangle$ (subespacio generado por $(0, 1)$)

Definición F.2 (paralelismo)**.** *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Decimos que dos rectas R_1 y R_2 son paralelas si $D_{R_1} = D_{R_2}$.*

Proposición F.2. *Sean V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión 2, $f : V \to V$ una biyección que lleva rectas sobre rectas y R_1 y R_2 dos rectas en V. Si R_1 y R_2 son paralelas entonces $f(R_1)$ y $f(R_2)$ son paralelas.*

Demostración. Para esto notaremos que, en un espacio vectorial de dimension 2, dos rectas diferentes son paralelas si y solo si son disjuntas. Para ver esto, si R_1 es paralela a R_2 y $x \in R_1 \cap R_2$ entonces, $R_1 = x + D_{R_1} = x + D_{R_2} = R_2$ (son iguales). Por otro lado, si R_1 no es paralela a R_2 entonces $D_{R_1} \neq D_{R_2}$ y, tomando $0 \neq x \in D_{R_1}$ y $0 \neq y \in D_{R_2}$ tenemos que $\{x, y\}$ es una base de V por lo que, si tomamos $a \in R_1$ y $b \in R_2$, tenemos que existen $s, t \in \mathbb{K}$ tal que $R_1 \ni a + sx = b + ty \in R_2$, esto es, $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.

De aquí se sigue que si dos rectas son paralelas y diferentes, ellas son disjuntas y, por ser f una biyección, sus imágenes son dos rectas disjuntas (y, por lo tanto, diferentes) por lo que son paralelas. □

Teorema F.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una biyección que lleva rectas sobre rectas y fija el $(0, 0)$. Entonces f es una aplicación lineal.*

Demostración. Sean x e y las imágenes de (1,0) y (0,1) respectivamente. Usando la primera proposición, vemos que $f(R_x) =$ [recta que contiene a x y a 0] $= \langle x \rangle$ y, de la misma manera, $f(R_y) = \langle y \rangle$. Notamos que el conjunto $\{x, y\}$ es l.i. pues $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = f(R_x) \cap f(R_y) = f(R_x \cap R_y) = \{f(0)\} = \{0\}$. Tomamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que lleva x en (1,0) y y en (0,1). Entonces $T \circ f$ lleva rectas sobre rectas y fija el (0,0), el (0,1) y el (1,0). Será necesario y suficiente probar que toda biyección con dichas características es la identidad:

Lema 1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una biyección que lleva rectas sobre rectas y fija el $(0, 0)$, el $(0, 1)$ y el $(1, 0)$. Entonces f es la identidad.*

Demostración. Notamos que $f(R_x) = R_x$ y $f(R_y) = R_y$. Observamos, entonces, que, si $a \in \mathbb{R}^2$, se cumple $f(a + R_x) =$ [recta que contiene a $f(a)$ y es paralela a R_x] $= f(a) + R_x$ y se cumple $f(a + R_y) = f(a) + R_y$.

Con esto tenemos que, si a y b tienen la misma coordenada x, entonces $f(a)$ y $f(b)$ tienen la misma coordenada x. Igualmente considerando la coordenada y. Entonces, si consideramos las inclusiones

$$i_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (x, 0)$$

$$i_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad y \mapsto (0, y)$$

y las proyecciones

$$\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x$$
$$\pi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto y$$

tenemos que

$$f(x,y) = (\pi_x\{f[i_x(x)]\}, \pi_y\{f[i_y(y)]\})$$

Definiendo $f_x = \pi_x \circ f \circ i_x$ y $f_y = \pi_y \circ f \circ i_y$ tenemos $f = f_x \times f_y$.

Ahora, usando que $f((1,0) + R_y) = f(1,0) + R_y = (1,0) + R_y$ y que $f((0,1) + R_x) = (0,1) + R_x$, llegamos a la conclusión de que $f(\{(1,1)\}) = f([(1,0) + R_y] \cap [(0,1) + R_x]) = [(1,0) + R_y] \cap [(0,1) + R_x] = \{(1,1)\}$, esto es, $f(1,1) = (1,1)$. Con esto tenemos que $f(\langle(1,1)\rangle) = \langle(1,1)\rangle$, por lo que $f_x(z) = f_y(z), \forall z \in \mathbb{R}$.

Sean ahora, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando que f lleva subespacios de dimensión 1 sobre subespacios de dimensión 1, obtenemos que

$$f(\alpha(x,y)) \parallel f(x,y)$$

Con lo cual llegamos a que

$$f_x(\alpha x) f_x(y) = f_x(\alpha y) f_x(x), \quad \forall \alpha, x, y \in \mathbb{R}$$

Haciendo $y = 1$, tenemos que $\forall x, \alpha \in \mathbb{R} : f_x(\alpha x) = f_x(\alpha) f_x(x)$.

Tenemos entonces que f_x preserva el producto. Si f_x preservara la suma, tendríamos que es un isomorfismo de cuerpos.

Lema 2. *Sean V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión 2 y $f : V \to V$ una biyección que lleva rectas sobre rectas y fija el origen. Si $x, y \in V$ son tales que $\{x, y\}$ es l.i. entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

Demostración. Basta notar que, si $\{x, y\}$ es l.i. , entonces

$$\{x + y\} = (x + \langle y\rangle) \cap (y + \langle x\rangle)$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} f(\{x+y\}) &= f(x + \langle y\rangle) \cap f(y + \langle x\rangle) \\ &= [f(x) + f(\langle y\rangle)] \cap [f(y) + f(\langle x\rangle)] \\ &= [f(x) + \langle f(y)\rangle] \cap [f(y) + \langle f(x)\rangle] \\ &= \{f(x) + f(y)\}. \end{aligned}$$

□

Entonces, para verificar que f_x preserva la suma observamos que

$$f(x+y,1) = f((x,1)+(y,0)) = f(x,1)+f(y,0)$$

por lo que

$$(f_x(x+y), f_x(1)) = (f_x(x)+f_x(y), f_x(1)+f_x(0))$$

pues $\{(x,1),(y,0)\}$ es l.i. y, viendo la primera componente,

$$f_x(x+y) = f_x(x)+f_x(y)$$

Por último, basta notar que el único automorfismo de cuerpos de $\mathbb{R}$ es la identidad por lo que f es la identidad. □

Para demostrar esta última afirmación usaremos un ejercicio del libro de Fraleigh de Álgebra Abstracta

Lema 3. *El único homomorfismo de cuerpos de $\mathbb{R}$ es la identidad (no idénticamente cero).*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homomorfismo de cuerpos no idénticamente cero. Si $x \geq 0$ entonces $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$. Si $x \geq y$ entonces $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$ por lo que $f(x) \geq f(y)$. Con esto tenemos que f es creciente. También notamos que, como $f(1) = 1$ y f preserva la suma, $\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = n$ y, con eso, $\forall n, k \in \mathbb{Z} - \{0\} : kf(n/k) = f(n) = n$ por lo que $\forall n, k \in \mathbb{Z} - \{0\} : f(n/k) = n/k$. Entonces, notamos que para todo $r \in \mathbb{R}$ se cumple que, formando

$$m_r = \{q_1 \in \mathbb{Q} / \ q_1 \leq r\}$$

$$M_r = \{q_2 \in \mathbb{Q} / \ q_2 \geq r\}$$

tenemos

$$r = sup(m_r)$$

$$r = inf(M_r)$$

Entonces

$$f(q_1) = q_1 \leq f(r), \quad \forall q_1 \in m_r$$

$$f(q_2) = q_2 \geq f(r), \quad \forall q_2 \in M_r$$

por lo que

$$r \leq f(r)$$

$$r \geq f(r)$$

De ahí, tenemos que $f(r) = r, \forall r \in \mathbb{R}$. □

□

Para demostrar que la afirmación del teorema sigue siendo válida si aumentamos la dimensión procedemos a realizar la siguiente

Definición F.3 (planos)**.** *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Un plano en V es un subconjunto de P tal que D_P definido como antes es un subespacio de dimensión 2 y no existe $P' \supsetneq P$ tal que $D_{P'}$ tiene dimensión 2.*

Notamos, como antes, que si $P \subset V$ es un plano, y $a \in P$ entonces se cumple que $P = a + D_P = \{a + x \in V / \ x \in D_P\}$. Recíprocamente, notamos que si W es un subespacio de dimensión 2 y $a \in V$ entonces $a + W$ es un plano.

También vemos que, dados $x \neq y \in P$, $R_{xy} \subset P$ (pues $x - y \in D_P$ y, por lo tanto, $D_{R_{xy}} \subset D_P$ con lo que $R_{xy} = x + D_{R_{xy}} \subset x + D_P = P$).

Proposición F.3. *Sea P un plano. Existen dos rectas R_1, R_2 contenidas en P que coinciden en un único punto. Dos rectas con esta propiedad cumplen que si P' es un plano que las contiene entonces P'=P.*

Demostración. Tomamos dos vectores $x, y \in D_P$ con $\{x, y\}$ base de D_P y $a \in P$. Entonces, definimos $R_1 = a \ + \langle x \rangle \ \subset P$ y $R_2 = a \ + \langle y \rangle \ \subset P$ y notamos que coinciden solo en el punto a por la independencia de x e y. Sea P' un plano que contenga a R_1 y a R_2 entonces $x, y \in D_{P'}$ por lo que $D_P = D_{P'}$ y $P' = a + D_{P'} = a + D_P = P$. □

Dos rectas como en la proposición anterior se dirá que generan el plano P. Sea $x \in P - (R_1 \cup R_2)$, notamos que existe una recta contenida en P que contiene a x, que pasa por R_1, por R_2 y no pasa por $R_1 \cap R_2$. Para eso tomamos un vector $y \in D_P - (D_{R_1} \cup D_{R_2})$ (p.ej. $\alpha + \beta$ con $0 \neq \alpha \in D_{R_1}$ y $0 \neq \beta \in D_{R_2}$) entonces la recta $x \ + \langle y \rangle$ cumple dicha propiedad. De una recta con dicha propiedad se dirá que enlaza el punto x con el par (R_1, R_2).

También hay que observar que, si R_1 y R_2 son dos rectas que coinciden en un único punto a, entonces existe un único plano P que las contiene. Este plano sería $a + (D_{R_1} \oplus D_{R_2})$.

Proposición F.4. *Sean V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $f : V \to V$ una biyección que lleva rectas sobre rectas. Se cumple que f lleva planos sobre planos.*

Demostración. Sea P un plano de V y R_1, R_2 dos rectas que lo generan. Demostraremos que $f(P)$ es el plano generado por $f(R_1)$ y $f(R_2)$. Sea $b \in P - (R_1 \cup R_2)$. Tomemos una recta R que enlaza b con (R_1, R_2). Entonces

la recta $f(R)$ enlaza $f(b)$ con $(f(R_1), f(R_2))$ y, por lo tanto, está contenida en el plano generado por $f(R_1)$ y $f(R_2)$. □

Teorema F.2. *Sean V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ (posiblemente infinita) y $f : V \to V$ una biyección que lleva rectas sobre rectas y que fija el origen. Entonces f es lineal.*

Demostración. Sea W un subespacio de dimensión 2. Entonces $f(W)$ es un subespacio de dimensión 2 pues f fija el origen y lleva planos en planos. Tomemos $T_1 : W \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : f(W) \to \mathbb{R}^2$ isomorfismos. Entonces $f|_W = T_2^{-1} \circ (T_2 \circ f|_W \circ T_1^{-1}) \circ T_1$ y, como por el primer teorema $T_2 \circ f|_W \circ T_1^{-1}$ es un isomorfismo, $f|_W$ es un isomorfismo. Se sigue de ahí que f es lineal. □

Bibliografía

[1] NABER, Gregory; *The Geometry of Minkowski Spacetime* Springer-Verlag, Estados Unidos, 1992

[2] GRIFFITHS, David; *Introduction to Electrodynamics* Prentice-Hall, Estados Unidos, 1999

[3] GRIFFITHS, David; *Introduction to Quantum Mechanics* Prentice-Hall, Estados Unidos, 2005

[4] RUBAKOV, Valery; *Classical theory of gauge fields* Princeton University Press, Estados Unidos, 2002

[5] ZAPATA, Jesús; *Anti-self-dual geometry, twistor spaces and Painlevé VI equation* Tesis de doctorado, IMPA, Brasil, 2007

[6] NANDA, S. *A geometrical proof that causality implies the Lorentz group* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volumen 79, pp 533-536, 1976