

Feuille 6. Diviseurs et Riemann-Roch

Ici X sera une surface de Riemann connexe et compacte de genre g et $D \in \text{Div}(X)$.

Exercice 1. Montrer que si $\deg(D) = 2g - 2$ alors $\ell(D) = g$ ou $\ell(D) = g - 1$.

Exercice 2. Montrer que si $\deg(D) \leq g - 1$ et $\ell(D) > 0$ alors $\ell(K - D) > 0$.

Exercice 3. Soit $p \in X$. Montrer que $\dim(L(D)/L(D - [p])) = 0$ ou 1 .

Exercice 4. Montrer que s'il existe $p \in X$ tel que $\ell([p]) = 2$ alors $g = 0$.

Exercice 5. Montrer que si $\deg(D) \geq 2g$ alors $L(D - [p]) \subsetneq L(D)$ pour tout $p \in X$.

Exercice 6. Supposons que $\ell(D) > 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{D} \leq D$ tel que $L(\tilde{D}) = L(D)$ mais $L(\tilde{D} - [p]) \subsetneq L(\tilde{D})$ pour tout $p \in X$.

Exercice 7. Soient $A, B \in \text{Div}(X)$ à supports¹ disjoints.

1. Montrer que $L(A) \cap L(B) \subset \mathbb{C}$.
2. Montrer que si, en plus, A et B sont effectives, alors $\ell(A + B) \geq \ell(A) + \ell(B) - 1$.
3. Montrer que cette inégalité ne peut pas être vraie en général.

Exercice 8. Supposons que $\ell(D) = n > 0$.

1. Montrer qu'il existe un ensemble fini $F \subset X$ tel que $L(D - [p]) \subsetneq L(D)$ pour tout $p \in X \setminus F$.
2. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide. Montrer qu'il existe $\tilde{D} \in \text{Div}(X)$ effective et $n - 1$ points $p_1, \dots, p_{n-1} \in U$ deux à deux distincts tels que $D \sim \tilde{D} + [p_1] + \dots + [p_{n-1}]$ et

$$\mathbb{C} = L(\tilde{D}) \subsetneq L(\tilde{D} + [p_1]) \subsetneq L(\tilde{D} + [p_1] + [p_2]) \subsetneq \dots \subsetneq L(\tilde{D} + [p_1] + \dots + [p_{n-1}]).$$

3. Montrer que, pour tout ouvert non vide $U \subset X$, il existe un diviseur effective $\tilde{D} \sim D$ tel que toute $f \in L(\tilde{D})$ non constante a un pôle sur U .
4. Soient $A, B \in \text{Div}(X)$ effectives. Montrer que $\ell(A + B) \geq \ell(A) + \ell(B) - 1$.
5. Montrer que si $\ell(D) > 0$ et $\ell(K - D) > 0$ alors $2(\ell(D) - 1) \leq \deg(D)$.

Exercice 9. Supposons que $\ell(D) = n > 1$. Prenons une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de $L(D)$ et considérons l'ensemble $T = \{p \in X : p \text{ est un pôle ou un zéro d'au moins l'un des } f_i\}$. Définissons l'application $\phi_D : X \setminus T \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ par $\phi_D(p) = [f_1(p), \dots, f_n(p)]$.

1. Montrer que ϕ_D s'étend à une application holomorphe sur X .
2. Supposons que $\deg(D) \geq 2g + 1$. Montrer que ϕ_D est une immersion injective.
3. Si $X = \mathbb{C}P^1$, décrire ϕ_D explicitement pour $D = k[\infty]$ avec $k \geq 1$. Dans ce cas, on obtient une inclusion $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^k$. Quel est le degré de la courbe projective $\phi_D(\mathbb{C}P^1)$?
4. Supposons que $\deg(D) \geq 2g + 1$ ce qui nous garantit que $\phi_D(X)$ est une surface de Riemann biholomorphe à X . Quel est le degré de la courbe projective $\phi_D(X)$?
5. Donner une description plus intrinsèque de ϕ_D comme une application $X \rightarrow \mathbb{P}(L(D)^*)$ où $\mathbb{P}(L(D)^*)$ est l'espace de droites complexe de l'espace dual de $L(D)$.

1. Le support du diviseur $\sum_{x \in X} n_x[x]$ est l'ensemble $\{x \in X : n_x \neq 0\}$.

1 Fibrés en droites

Quand ce soit nécessaire, on supposera connu que tout fibré en droites holomorphe admet une section méromorphe et, en conséquence, que $\text{Div}(X)/\text{Princ}(X)$ est en bijection avec les fibrés en droites holomorphes (modulo isomorphisme). On supposera aussi connu (ou vous pourriez le deviner comme exercice) la notion de produit tensoriel des fibrés et des morphismes entre fibrés (et la notion de dual d'un fibré si nécessaire).

Exercice 10. Soit $\mathcal{L}$ le fibré en droites associé à D et fixons $p \in X$. Interpréter la condition $L(D) = L(D - [p])$ en termes des sections holomorphes de $\mathcal{L}$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{L}$ le fibré en droites associé à D . Montrer que les sections holomorphes de $\mathcal{L}$ sur un ouvert connexe U de X s'identifie naturellement avec $\{f \in \mathcal{M}(U)^* : \text{div} f + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{L}$ le fibré en droites associé à D . Montrer que $\mathcal{L}^*$ est associé à $-D$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{L}_1$ le fibré en droites associé à $D_1 \in \text{Div}(X)$ et $\mathcal{L}_2$ celui associé à $D_2 \in \text{Div}(X)$. Montrer que $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est le fibré en droites associé à $D_1 + D_2$.

Exercice 14. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux fibrés en droites holomorphes. Montrer que s'il existe un morphisme de fibrés holomorphes $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ alors $\deg \mathcal{L}_1 \leq \deg \mathcal{L}_2$ et que si $\deg \mathcal{L}_1 = \deg \mathcal{L}_2$ alors ce morphisme est un isomorphisme.

Exercice 15. Supposons $g = 1$. Montrer qu'il existe exactement 4 fibrés en droites holomorphes qui satisfont $\mathcal{L}^{\otimes 2} = TX$.

Exercice 16. Si $g \geq 1$ montrer que, pour tout $p \in X$, il existe un fibré en droites holomorphe où toute section holomorphe de ce fibré s'annule en p .

Exercice 17. Est-il possible de donner une description de ϕ_D de l'exercice 9 en utilisant des fibrés en droites ? Quelles conditions devrait D satisfaire ?

Petit rappel de la construction. Pour un diviseur $D = \sum_{x \in X} n_x [x]$, on veut construire un fibré en droites holomorphe $\mathcal{L}$ muni d'une section méromorphe s telle que $\text{div} s = D$.

Idée : Si on avait trouvé un tel $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}|_{X \setminus \text{supp}(D)}$ aurait une section holomorphe sans zéros $s|_{X \setminus \text{supp}(D)}$. Ceci donnerait une trivialisatation de $\mathcal{L}$ sur $X \setminus \text{supp}(D)$ où la section s se voit comme la fonction 1. Autour de x tel que $n_x \neq 0$, on ne peut pas faire exactement pareil mais, on pourrait choisir une coordonnée z autour de x tel que $z = 0$ se correspond à x et considérer $z^{-n_x} s$ qui sera une section holomorphe et non nul près de x . Cela trivialise $\mathcal{L}$ autour de x . Finalement on a les deux cas suivants :

- s se voit comme la fonction 1 dans la trivialisatation choisit sur $X \setminus \text{supp}(D)$ et
- s se voit comme z^{n_x} dans la trivialisatation choisit autour de x .

Pour aller de la trivialisatation sur $X \setminus \text{supp}(D)$ à la trivialisatation choisit autour de x il suffit de multiplier par z^{n_x} . Pour aller d'une trivialisatation autour de x à une trivialisatation autour de y , il suffit de multiplier par $z^{n_y - n_x}$ (cela au cas où on n'a pas choisit les voisinages assez petits).

Plus algébrique. Une construction plus "directe" du fibré, c'est de construire directement le $\mathcal{O}_X$ -module associé au fibré ($\mathcal{O}_X$ étant le faisceau de fonctions holomorphes sur X). Cela est le contenu de l'exercice 11.