Feuille 3. Revêtements et fonctions algébriques

Exercice 1. Soient X et Y deux surfaces de Riemann connexes et compactes et soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante.

1. Montrer que toute application continue $T : X \to X$ tel que $f \circ T = f$ est holomorphe.
2. Dénotons par $S \subset Y$ l'ensemble des points de ramification et $\tilde{X} = X \setminus f^{-1}(S)$. Montrer que tout biholomorphisme $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tel que $f|_{\tilde{X}} \circ \tilde{T} = f|_{\tilde{X}}$ peut s'étendre à un biholomorphisme $T : X \to X$ tel que $f \circ T = f$.
3. Soit $T : X \to X$ un biholomorphisme tel que $f \circ T = f$ et soit $x \in X$. Montrer que si $x \in X$ est un point de branchement de f d'ordre n alors $T(x)$ est un point de branchement de f d'ordre n.

Exercice 2. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ deux sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que pour toute application holomorphe $f : \mathbb{C}/\Gamma_1 \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ non constante telle que $f(0) = 0$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ et tel que $p_2(\alpha z) = f(p_1(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ où $p_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma_i$ est la projection canonique.
2. Soit $H : [0,1] \times \mathbb{C}/\Gamma_1 \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ une application continue telle que $H(t,\cdot) : \mathbb{C}/\Gamma_1 \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ est holomorphe pour tout $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ continue telle que $H(t,p) = H(0,p) + \gamma(t)$ pour tout $(t,p) \in [0,1] \times \mathbb{C}/\Gamma_1$. En déduire que la composante connexe de l'identité dans le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique ne contient que des translations.

Exercice 3 (Quelques exemples)**.**

1. Trouver les points de ramification de l'application $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$
   Quels sont les biholomorphismes $T : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tels que $f \circ T = f$?
2. Soit $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ définie par un polynôme non constante et soit $T : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ un biholomorphisme tel que $f \circ T = f$.
   — Montrer que T est de la forme $T(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et α une racine de l'unité.
   — Montrer que si $\alpha = 1$ alors $\beta = 0$.
   — Donner un exemple de f et T telles que $\beta \neq 0$.
   — Donner un exemple de f de degré 3 telle que le seul T possible soit l'identité.
3. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ deux sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}^2$ tels que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Montrer que la application canonique $p : \mathbb{C}/\Gamma_1 \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ est un revêtement non ramifié (holomorphe) et trouver le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ d'automorphismes T de $\mathbb{C}/\Gamma_1$ qui satisfont $p \circ T = p$.

Exercice 4. Notons $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

1. Soit $n > 0$. Montrer que l'application $g : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^*$ définie par $g(z) = z^n$ est un revêtement (non-ramifié).

2. Soit X une surface de Riemann connexe et soit $f : X \to \mathbb{D}^*$ un revêtement holomorphe non-ramifié de degré fini. Montrer qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : X \to \mathbb{D}^*$ et un entier $n > 0$ tels que, pour tout $x \in X$, $f(x) = \varphi(x)^n$.
3. Soit X une surface de Riemann *pas nécessairement connexe* et $f : X \to \mathbb{D}^*$ un revêtement holomorphe non-ramifié de degré fini. Montrer qu'il existe un entier $k > 0$, des entiers $n_1, \dots, n_k > 0$ et un biholomorphisme $\varphi : X \to \mathbb{D}_1^* \sqcup \dots \sqcup \mathbb{D}_k^*$ tels que, pour tout $x \in \varphi^{-1}(\mathbb{D}_i^*)$, $f(x) = \varphi(x)^{n_i}$. Ici $\mathbb{D}_i^*$ sont des copies disjointes de $\mathbb{D}^*$ et $z \mapsto z^{n_i}$ va de $\mathbb{D}_i^*$ vers $\mathbb{D}^*$.

Courbes hyperelliptique sur $\mathbb{C}$

Prenons un polynôme monique $P \in \mathbb{C}[z]$ de racines distincts $P(z) = (z - a_1)\dots(z - a_k)$ avec $k \geq 1$. Considérons l'ensemble

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = P(z)\}.$$

On sait déjà, par la feuille de TD1, que l'adhérence de S dans $\mathbb{C}P^2$ n'est pas une surface de Riemann si $k \geq 4$. Construisons une "meilleure" compactification de S. Considérons P comme une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et prenons la surface de Riemann associée à $w^2 - P \in \mathcal{M}(\mathbb{C}P^1)[w]$ qu'on appellera $\sqrt{P(z)}$ et qui vient avec une projection $p : \sqrt{P(z)} \to \mathbb{C}P^1$.

Exercice 5. Construire une application holomorphe $\Phi : S \to \sqrt{P(z)}$ telle que $p(\Phi(z, w)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et montrer que c'est un biholomorphisme sur son image.

Prenons $\bar{S} =$ adherence de S dans $\mathbb{C}P^2$.

Exercice 6. Montrer que l'application $\Phi^{-1} : \Phi(S) \to \mathbb{C}P^2$ s'étend à une application holomorphe $\Phi^{-1} : \sqrt{P(z)} \to \mathbb{C}P^2$ d'image $\bar{S}$.

Exercice 7. Calculer le genre de $\sqrt{P(z)}$.

Une surface de Riemann obtenue comme $\sqrt{P(z)}$ est appelée *courbe hyperelliptique.*

Théorème de Puiseux

Le but de l'exercice suivant est de décrire la clôture algébrique du corps $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ des germes de fonctions méromorphes en 0. Plus précisément, $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ est formé des séries de Laurent (formelles) de rayon de convergence positive. Pour chaque $m \geq 1$ prenons $\mathbb{C}\{\{z^{1/m}\}\}$ une copie de $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ où la nouvelle variable considérée est appelée $z^{1/m}$. Pour m, n tels que $m|n$ on a l'inclusion canonique $i_{n,m} : \mathbb{C}\{\{z^{1/m}\}\} \to \mathbb{C}\{\{z^{1/n}\}\}$ donnée par

$$i_{n,m}\left(\sum_{\ell=k}^{\infty} a_\ell (z^{1/m})^\ell\right) = \sum_{\ell=k}^{\infty} a_\ell (z^{1/n})^{\ell n/m}.$$

Ceci nous donne un diagramme commutative filtrant (système inductif) $((\mathbb{C}\{\{z^{1/m}\}\})_{m\geq 1}, (i_{n,m})_{m|n})$ et on peut considérer sa colimite (limite inductive) $\mathrm{Pui}(z)$. On va démontrer que

$$\mathrm{Pui}(z) \text{ est la clôture algébrique de } \mathbb{C}\{\{z\}\}.$$

Exercice 8. Soit $F(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il existe un élément $\varphi \in \mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ tel que

$$F(\zeta^n, \varphi(\zeta)) = 0 \in \mathbb{C}\{\{\zeta\}\}.$$