Feuille 1. Rappels et exemples

Pour nous la connexité fait partie de la définition d'une surface de Riemann (sauf indication du contraire). On notera $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1 Quelques propriétés de base

Soient X et Y deux surfaces de Riemann.

Exercice 1 (Singularité effaçable)**.** Soient $x \in X$ et $f : X \setminus \{x\} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Montrer qu'il existe une unique application holomorphe $\tilde{f} : X \to \mathbb{D}$ telle que $\tilde{f}|_{X\setminus\{x\}} = f$.

Exercice 2. Supposons X et Y compactes et prenons $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ et $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$. Montrer que tout biholomorphisme de $X \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ vers $Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$ peut s'étendre à un biholomorphisme de X vers Y et, en particulier, que $m = n$.

Exercice 3. Soit S une surface topologique compacte et soient $p_1, \ldots, p_n \in S$. Supposons que $S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ est muni d'un atlas holomorphe. Montrer qu'il existe *au plus* un atlas holomorphe maximal sur S compatible avec l'atlas de $S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Donner un exemple où il n'existe pas un tel atlas holomorphe maximal sur S.

Exercice 4 (Principe des zéros isolés)**.** Soient $f, g : X \to Y$ deux applications holomorphes. Montrer que si l'ensemble $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ admet un point d'accumulation alors $f = g$.

Exercice 5 (Application ouverte)**.** Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante. Montrer que f est ouverte.

Exercice 6. Soit $f : X \to Y$ holomorphe non constante. Montrer que si X est compacte, alors l'application f est surjective et Y est compacte. En déduire que, si X est compacte, il n'existe pas de fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ holomorphes non-constantes et, en particulier, il n'existe pas de plongement holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ (pas de théorème de plongement de Whitney naïf).

Exercice 7. Justifier (et mieux énoncer) l'assertion suivante.

$$\mathcal{M}(X) \simeq \{\text{fonctions } f : X \to \mathbb{C}P^1 \text{ holomorphes}\} \setminus \{\infty\}.$$

Est-ce que ça aurait un sens d'identifier un quotient de fonctions holomorphes avec une application à valeurs dans $\mathbb{C}P^1$ si on est en dimension > 1 ?

Exercice 8. Supposons que X et Y sont compactes. Prenons $y \in Y$ et une application holomorphe $f : X \to Y$ telle que $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Montrer qu'il existe des voisinages $D, D_1, \ldots, D_k$ de $x, y_1, \ldots, y_k$ et des biholomorphismes $\psi : \mathbb{D} \to D$ et $\psi_i : \mathbb{D} \to D_i$ tels que

— $\psi(0) = x$,

— $\psi_i(0) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$,

— $f^{-1}(D) = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k$ et

— $f(\psi_i(z)) = \psi(z^{n_i})$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (avec $n_i \geq 1$).

Exercice 9 (Version simple du théorème de Radó)**.** Soit S un espace topologique compact localement homéomorphe à $\mathbb{C}$. Montrer que S est à base dénombrable.

2 Deux exemples standards

Exercice 10. Considérons la sphère S^2 en tant qu'espace topologique et soit $p_0 \in S^2$. Prenons un homéomorphisme $\varphi : S^2 \setminus \{p_0\} \to \mathbb{C}$ quelconque. Montrer qu'il existe un unique atlas holomorphe maximal de S^2 tel que φ soit une carte, et appelons S^2_φ à la sphère munie de cet atlas. Montrer que si $q_0 \in S^2$ et $\psi : S^2 \setminus \{q_0\} \to \mathbb{C}$ est un autre homéomorphisme, S^2_φ est biholomorphe à S^2_ψ.

Exercice 11. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un sous-groupe discret.

1. Montrer que Γ est isomorphe soit à $\{0\}$, soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer qu'il existe un unique atlas holomorphe maximal sur $\mathbb{C}/\Gamma$ telle que l'application projection $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ soit holomorphe.

3 Courbes hyperelliptiques sur $\mathbb{C}$ (première tentative)

Soit $Q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ une forme quadratique non-dégénérée et soit

$$S = \{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 : Q(z_1, z_2, z_3) = 0\} \subset \mathbb{C}P^2.$$

Exercice 12 (Quadrique)**.** Montrer que S est une surface de Riemann (sous-variété complexe [1] de dimension 1 de $\mathbb{C}P^2$) biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$.

Prenons un polynôme monique $P \in \mathbb{C}[z]$ de racines $a_1, \ldots, a_k$ distincts avec $k \geq 1$, c'est-à-dire, $P(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_k)$. Considérons l'ensemble

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = P(z)\}.$$

Exercice 13. Montrer que X est une surface de Riemann (structure héritée de $\mathbb{C}^2$).

Considérons $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ où (z, w) devient $[z, w, 1]$ et prenons l'adhérence $\bar{X}$ de X dans $\mathbb{C}P^2$. De façon équivalente, on considère l'homogénéisation du polynôme $w^2 - P(z)$ et on pose, si $k \geq 2$,

$$\bar{X} = \{[z, w, t] \in \mathbb{C}P^2 : w^2 t^{k-2} = (z - a_1 t) \ldots (z - a_k t)\}.$$

Exercice 14. Montrer que $\bar{X}$ est une surface de Riemann si et seulement si $k \leq 3$. Quelle surface obtient-on si $k \leq 2$?

Plus tard, on étudiera une "meilleure" compactification de X par un ensemble fini.

1. Si X est une variété complexe de dimension m, on dira qu'une partie $Y \subset X$ est une sous-variété (complexe) de dimension n si autour de chaque point de Y on peut trouver une carte $\varphi : U \subset X \to \mathbb{C}^m$ de X telle que $\varphi(Y \cap U) = (\mathbb{C}^n \times \{0\}) \cap \varphi(U)$.