Feuille 4. Revêtements, 1-formes, géométrie algébrique...

Ici X et Y seront deux surfaces de Riemann connexes et compactes.

Exercice 1 (Encore sur les revêtements)**.**

1. Existe-t-il des revêtements non ramifiés de $\mathbb{C}P^1$?
2. Et des revêtements ramifiés de $\mathbb{C}P^1$ avec un seul point de ramification ?
3. Montrer que tout revêtement entre deux courbes elliptiques est non ramifié.
4. Montrer que toute fonction holomorphe non constante entre deux surfaces du même genre $g \geq 2$ est un biholomorphisme.
5. Montrer que s'il existe une fonction holomorphe $f : X \to Y$ non constante alors le genre de X est plus grand ou égal à celui de Y.

Soit $p : X \to Y$ une application holomorphe non nulle. Pour $D = \sum n_x[x] \in \mathrm{Div}(X)$ nous dénoterons p_*D le *diviseur image*[1] $p_*D = \sum n_x[p(x)]$. Pour $D = \sum n_y[y] \in \mathrm{Div}(Y)$ et p non-constante, nous dénoterons p^*D le *diviseur réciproque* $p^*D = \sum(\mathrm{mult}_x p)n_{p(x)}[x]$.

Exercice 2 (Riemann-Hurwitz)**.** Soit $p : X \to Y$ une application non-constante.

1. Pour une fonction méromorphe non-nulle $f : Y \dashrightarrow \mathbb{C}$, montrer que $\mathrm{div}(p^*f) = p^*\mathrm{div}(f)$.
2. Pour une 1-forme ω non-nulle sur Y montrer que $\mathrm{div}(p^*\omega) = p^*\mathrm{div}(\omega) + R_p$, où $R_p \in \mathrm{Div}(X)$ est le diviseur de ramification de p.
3. Pour une 1-forme ω non-nulle sur Y, montrer que $p_*(\mathrm{div}(p^*\omega)) = n_p\mathrm{div}(\omega) + p_*(R_p)$, où n_p est le degré de p.

Exercice 3. Soit $f : X \to \mathbb{C}P^1$ une fonction holomorphe non constante et soit $z \in \mathbb{C}P^1$ un point qui n'est pas de ramification. Montrer que si $g : X \to \mathbb{C}P^1$ est une fonction holomorphe qui sépare les points de $f^{-1}(z)$ alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$.

Exercice 4. Soit $k \geq 1$ et $P = (z - a_1)\dots(z - a_k)$ un polynôme monique de racines simples. Rappelons que cela définit un revêtement ramifié $\pi : \sqrt{P(z)} \to \mathbb{C}P^1$ et qu'on avait un biholomorphisme entre $\pi^{-1}(\mathbb{C})$ et $S := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = P(z)\}$. Restreignons la 1-forme dz définit sur $\mathbb{C}^2$ à S et transportons-la à $\pi^{-1}(\mathbb{C})$ en gardant la notation dz.

1. Montrer que dz s'étend à une 1-forme méromorphe sur $\sqrt{P(z)}$.
2. Calculer $\mathrm{div}(dz)$.
3. Si $k \geq 3$, trouver une fonction méromorphe non nulle $f : \sqrt{P(z)} \dashrightarrow \mathbb{C}$ dont le diviseur satisfait $\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(dz) \geq 0$. Est-ce qu'on pourrait trouver une telle fonction si $k \leq 2$?
4. Trouver $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ 1-formes holomorphes linéairement indépendantes.

1. C'est-à-dire, $p_* : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$ est le morphisme induit par $f : X \to Y$ quand on pense $\mathrm{Div}(X)$ et $\mathrm{Div}(Y)$ comme les groupes abéliens libres engendrés par X et Y.

Exercice 5. Soit $U \subset X$ un ouvert cofini et notons par $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions méromorphes sur X qui sont holomorphes sur U.

1. Montrer que si $U \subsetneq \mathbb{C}P^1$ alors $\mathcal{O}(U)$ est un anneau factoriel.
2. Montrer que $\mathcal{O}(\mathcal{E} \setminus \{p\})$ n'est pas un anneau factoriel si $\mathcal{E}$ est une courbe elliptique et $p \in \mathcal{E}$.

Exercice 6. Soit $X \subset \mathbb{C}P^2$ une surface de Riemann obtenue comme les zéros d'un polynôme homogène irréductible $P \in \mathbb{C}[z, w, t]$. Montrer que

$$\deg(X) = \deg(P).$$

Exercice 7. Soit $X \subset \mathbb{C}P^2$ une surface de Riemann obtenue comme les zéros d'un polynôme homogène irréductible $P \in \mathbb{C}[z, w, t]$.

1. Soient $f, g \in \mathbb{C}[z, w, t]$ deux polynôme homogènes du même degré tels que $P \nmid g$. Montrer que f/g définie une fonction méromorphe sur X.
2. Montrer que toute fonction méromorphe sur X peut être construite de cette façon.

Dans l'exercice suivant, on pourra accepter sans preuve (on verra la preuve plus tard dans le cours) le théorème suivant. *Pour tout point $x \in X$, il existe une fonction méromorphe non constante qui est holomorphe dehors x.*

Exercice 8. Considérons la catégorie $\mathcal{S}$ de surfaces de Riemann où les morphismes sont les applications holomorphes non constantes et considérons la catégorie $\mathcal{E}$ des extensions (de corps) de type fini de degré de transcendance [2] 1 de $\mathbb{C}$ où les morphismes sont les morphismes d'anneaux unitaire qui fixent $\mathbb{C}$. Prenons le foncteur contravariant $F : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ défini par

— $F(X) = \mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X et

— pour $\varphi : X \to Y$ le morphisme $F(\varphi) : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ est donné par $f \mapsto f \circ \varphi$.

Montrer que F est une équivalence de catégories.

2. Autrement dit, les objets de $\mathcal{E}$ sont les extensions finies K de $\mathbb{C}(t) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{C}P^1)$ mais on oublie la manière dont $\mathbb{C}(t)$ est incluse dans K et l'on ne retient que la façon dont $\mathbb{C}$ est incluse dans K.